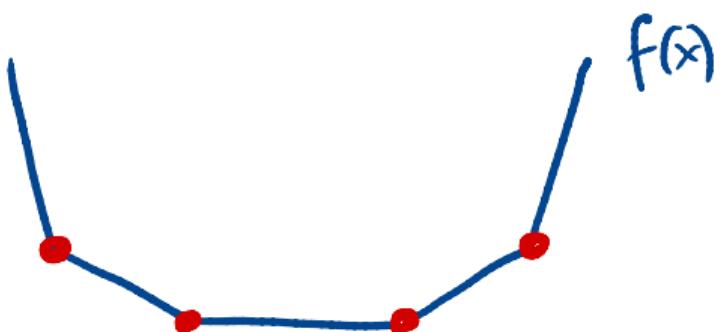




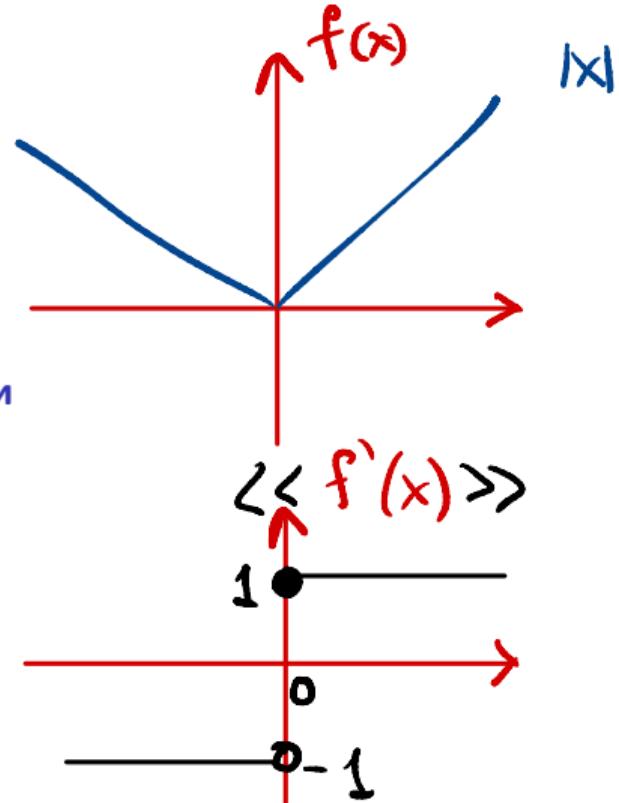
Негладкая оптимизация. Нижние оценки.  
Субградиентный метод

Даня Меркулов, Петр Остроухов

Оптимизация для всех! ЦУ



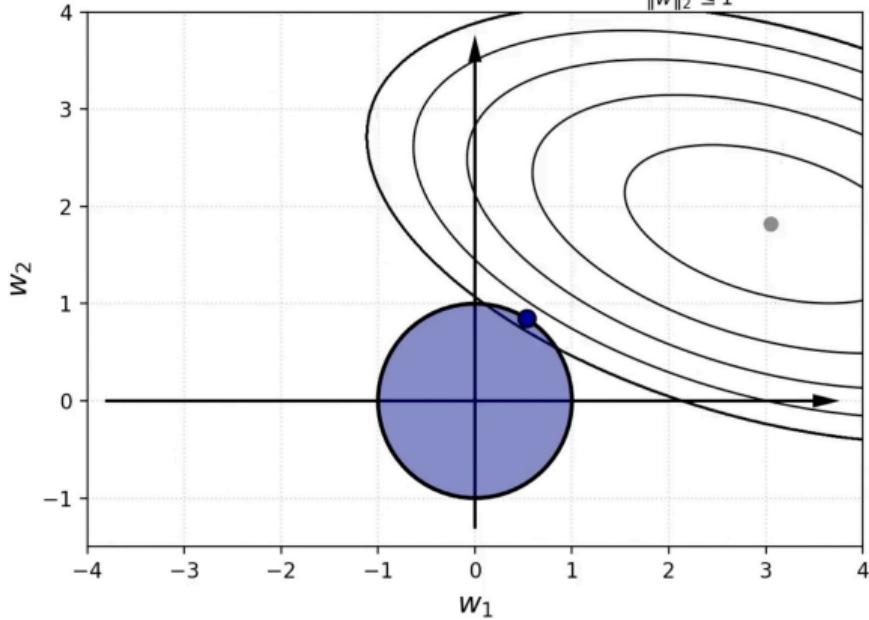
Негладкие задачи



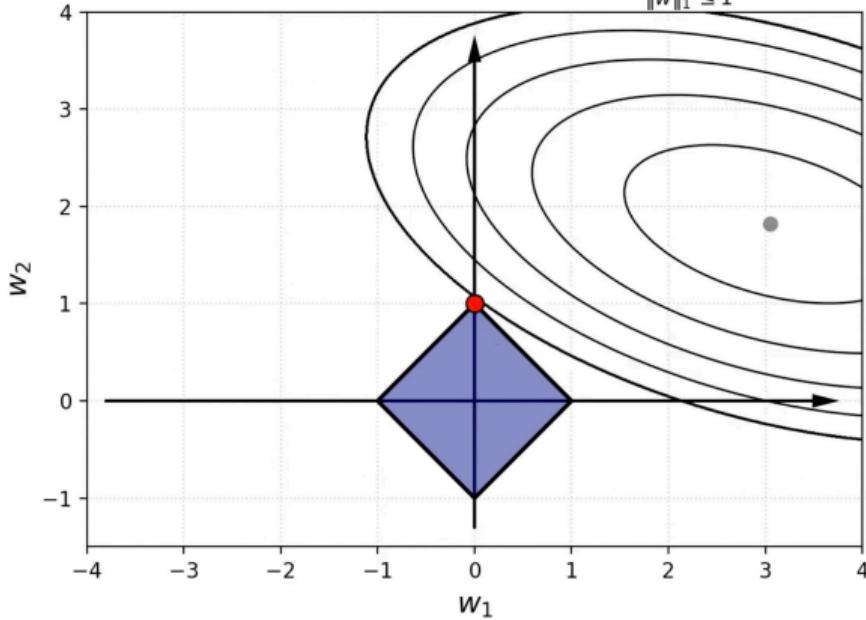
## Задача наименьших квадратов с $\ell_1$ -регуляризацией

$\ell_1$  induces sparsity

$\ell_2$  regularization.  $\|Xw - y\|_2^2 \rightarrow \min_{\|w\|_2 \leq 1}$



$\ell_1$  regularization.  $\|Xw - y\|_2^2 \rightarrow \min_{\|w\|_1 \leq 1}$



@fminxyz

## Нормы не являются гладкими

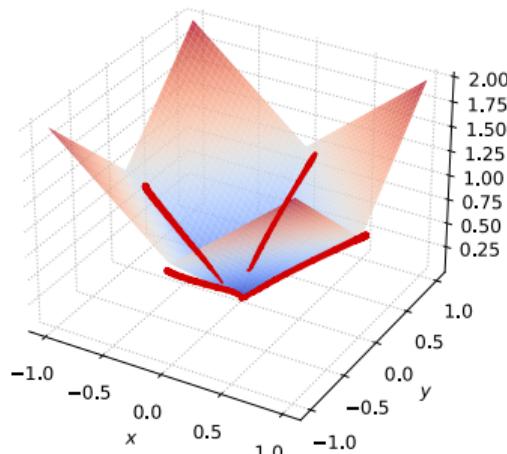
б  $n=2$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|x\|_2$$

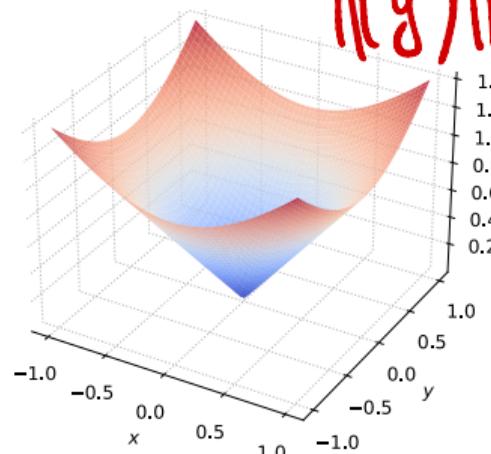
$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x),$$

Рассмотрим задачу выпуклой оптимизации. Будем считать  $f(x)$  выпуклой, но не обязательно гладкой.

$p = 1$  Norm Cone



$p = 2$  Norm Cone



$p = \infty$  Norm Cone

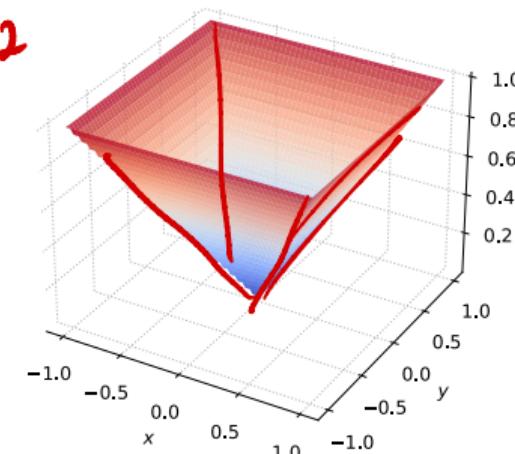


Рис. 1: Конусы норм для разных  $p$ -норм не являются гладкими

## Пример Вульфа

Wolfe's example

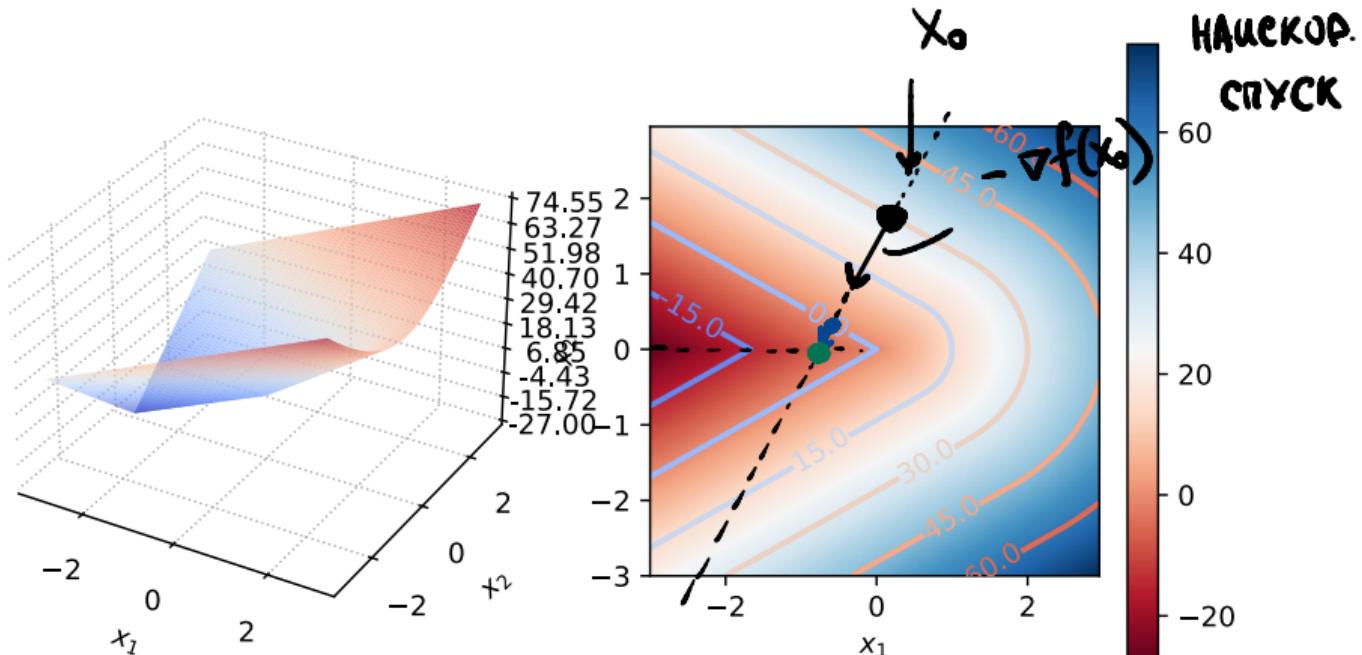
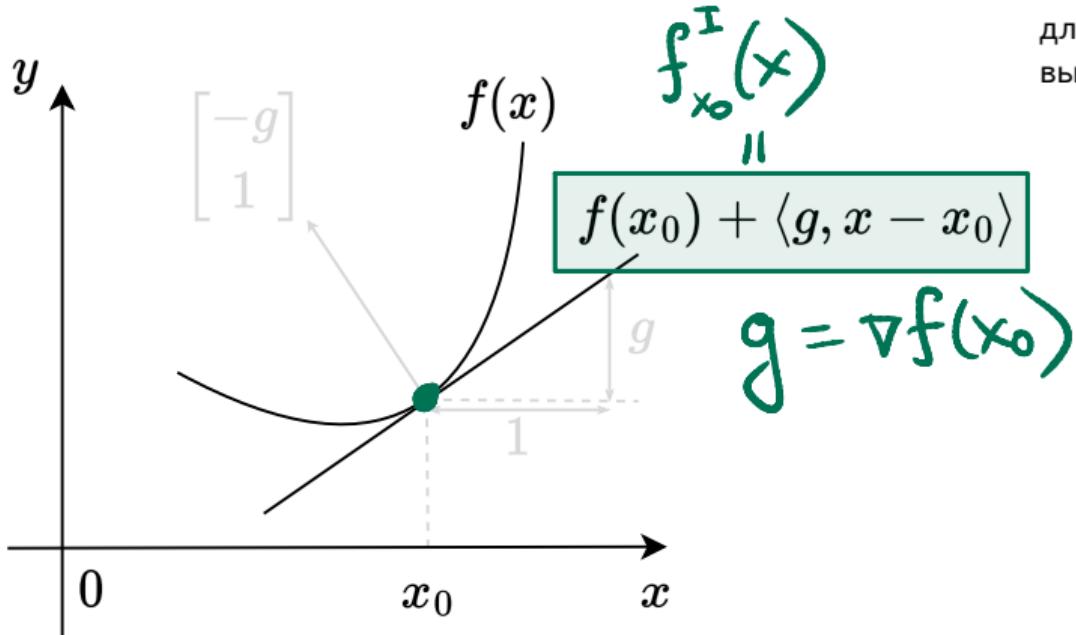


Рис. 2: Пример Вульфа. [Открыть в Colab](#)

## Вычисление субградиента

## Линейная нижняя оценка для выпуклых функций



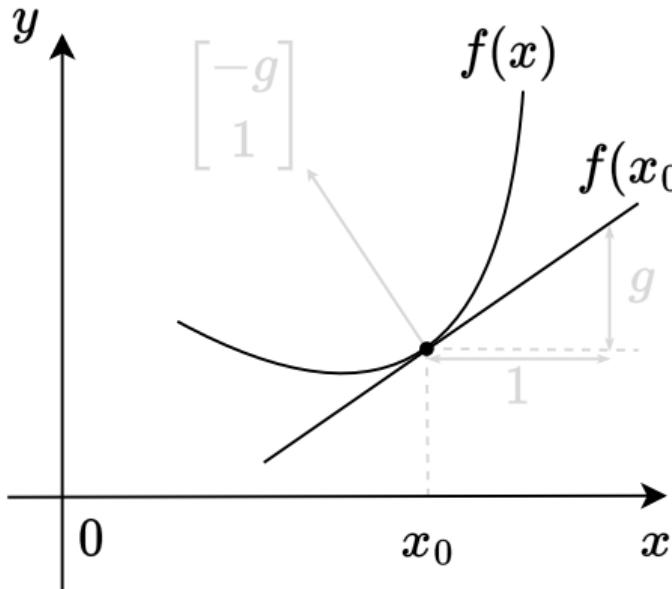
Важное свойство выпуклой функции  $f(x)$ :  
для любой точки  $x_0$  и для всех  $x \in \text{dom } f$   
выполняется неравенство:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

$$f(x) \geq f_{x_0}^I(x) \quad \forall x$$

Рис. 3: Апроксимация Тейлора первого порядка служит глобальной нижней оценкой для выпуклой функции

## Линейная нижняя оценка для выпуклых функций



Важное свойство выпуклой функции  $f(x)$ : для любой точки  $x_0$  и для всех  $x \in \text{dom } f$  выполняется неравенство:

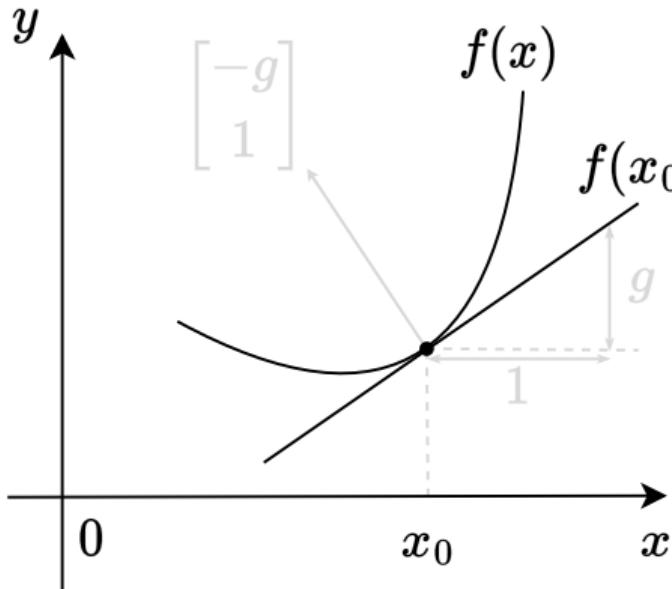
$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

для некоторого вектора  $g$ , то есть касательная к графику функции является *глобальной* нижней оценкой для функции.

- Если  $f(x)$  дифференцируема, то  $g = \nabla f(x_0)$ .

Рис. 3: Аппроксимация Тейлора первого порядка служит глобальной нижней оценкой для выпуклой функции

## Линейная нижняя оценка для выпуклых функций



Важное свойство выпуклой функции  $f(x)$ : для любой точки  $x_0$  и для всех  $x \in \text{dom } f$  выполняется неравенство:

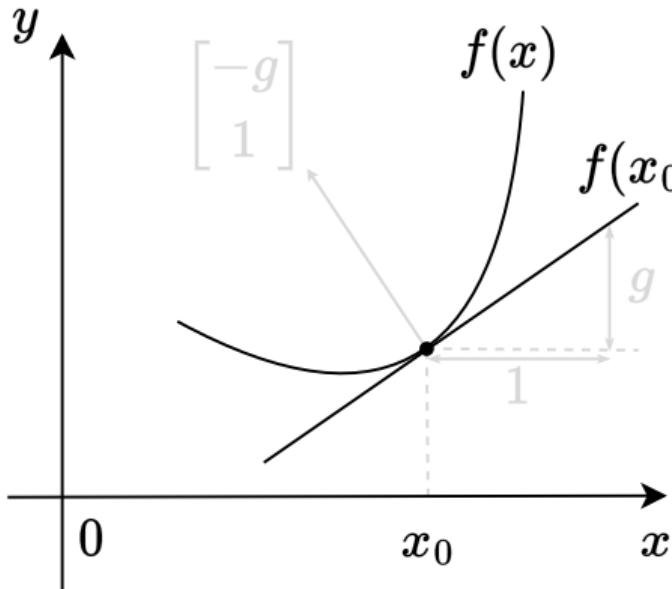
$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

для некоторого вектора  $g$ , то есть касательная к графику функции является глобальной нижней оценкой для функции.

- Если  $f(x)$  дифференцируема, то  $g = \nabla f(x_0)$ .
- Не все непрерывные выпуклые функции дифференцируемы.

Рис. 3: Аппроксимация Тейлора первого порядка служит глобальной нижней оценкой для выпуклой функции

## Линейная нижняя оценка для выпуклых функций



Важное свойство выпуклой функции  $f(x)$ : для любой точки  $x_0$  и для всех  $x \in \text{dom } f$  выполняется неравенство:

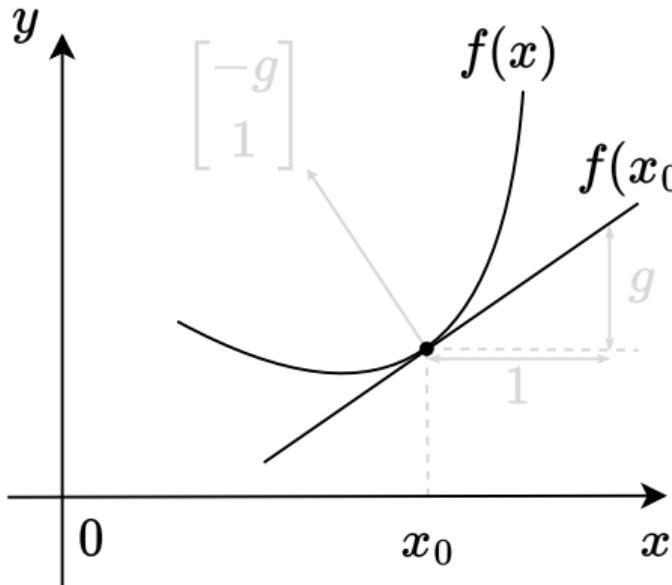
$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

для некоторого вектора  $g$ , то есть касательная к графику функции является глобальной нижней оценкой для функции.

- Если  $f(x)$  дифференцируема, то  $g = \nabla f(x_0)$ .
- Не все непрерывные выпуклые функции дифференцируемы.

Рис. 3: Аппроксимация Тейлора первого порядка служит глобальной нижней оценкой для выпуклой функции

## Линейная нижняя оценка для выпуклых функций



Важное свойство выпуклой функции  $f(x)$ : для любой точки  $x_0$  и для всех  $x \in \text{dom } f$  выполняется неравенство:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

для некоторого вектора  $g$ , то есть касательная к графику функции является глобальной нижней оценкой для функции.

- Если  $f(x)$  дифференцируема, то  $g = \nabla f(x_0)$ .
- Не все непрерывные выпуклые функции дифференцируемы.

Мы хотим сохранить это полезное свойство и для негладких функций.

Рис. 3: Аппроксимация Тейлора первого порядка служит глобальной нижней оценкой для выпуклой функции

## Субградиент и субдифференциал

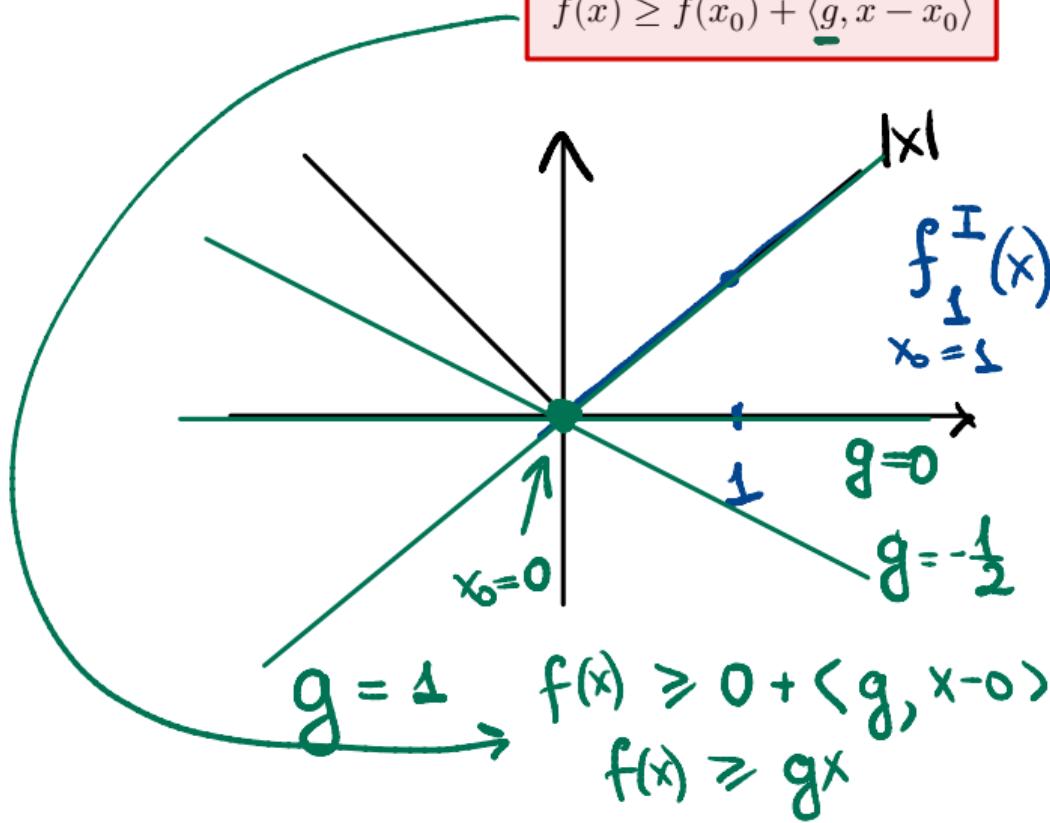
$\mathbb{R}^n$

Вектор  $g$  называется **субградиентом** функции  $f(x) : S \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $x_0$ , если  $\forall x \in S$ :

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

$$g = \nabla f(x_0)$$

↑  
если  $f$ -нагл.



## Субградиент и субдифференциал

Вектор  $g$  называется **субградиентом** функции  $f(x) : S \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $x_0$ , если  $\forall x \in S$ :

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Множество всех субградиентов функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  называется **субдифференциалом** функции  $f$  в точке  $x_0$  и обозначается  $\partial f(x_0)$ .

## Субградиент и субдифференциал

Вектор  $g$  называется **субградиентом** функции  $f(x) : S \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $x_0$ , если  $\forall x \in S$ :

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Множество всех субградиентов функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  называется **субдифференциалом** функции  $f$  в точке  $x_0$  и обозначается  $\partial f(x_0)$ . 

$$\partial f(x_0) = [-0.2; 1.5]$$

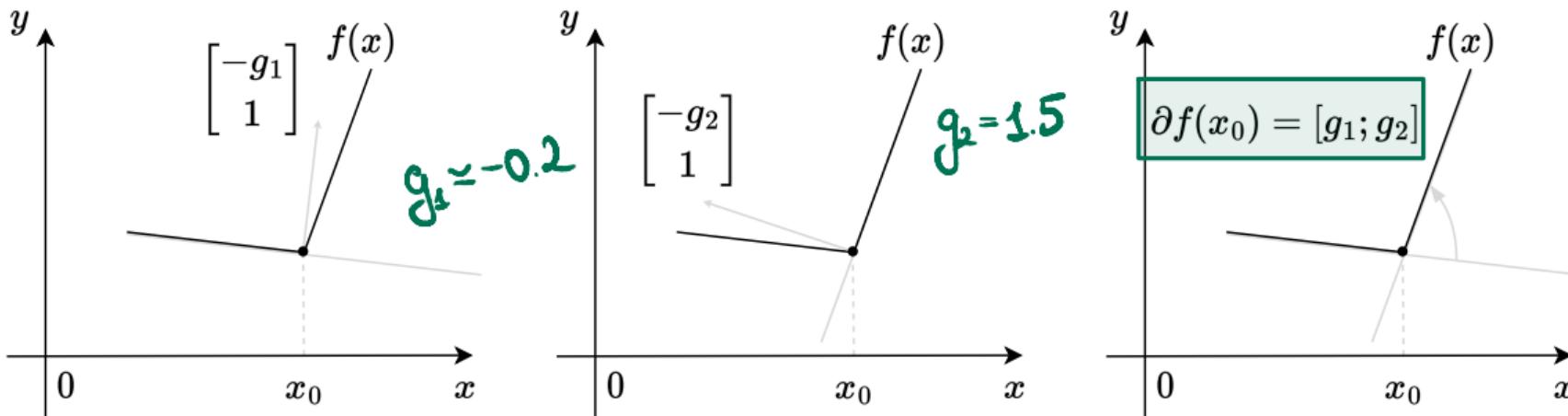


Рис. 4: Субдифференциал — это множество всех возможных субградиентов

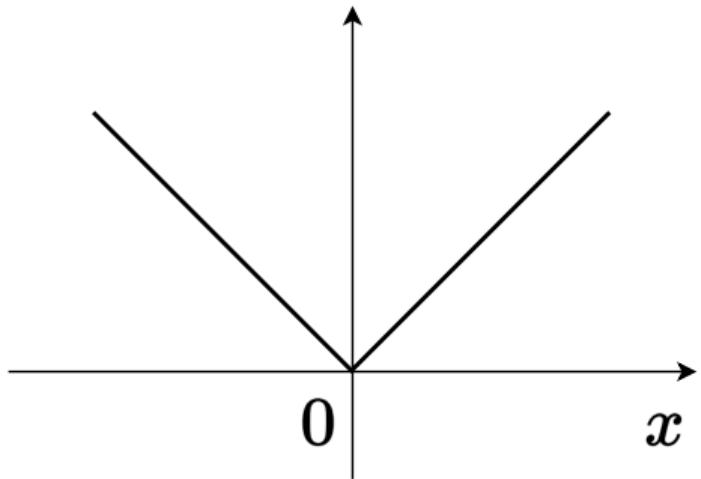
## Субградиент и субдифференциал

Найдите  $\partial f(x)$ , если  $f(x) = |x|$

## Субградиент и субдифференциал

Найдите  $\partial f(x)$ , если  $f(x) = |x|$

$$f(x) = |x|$$

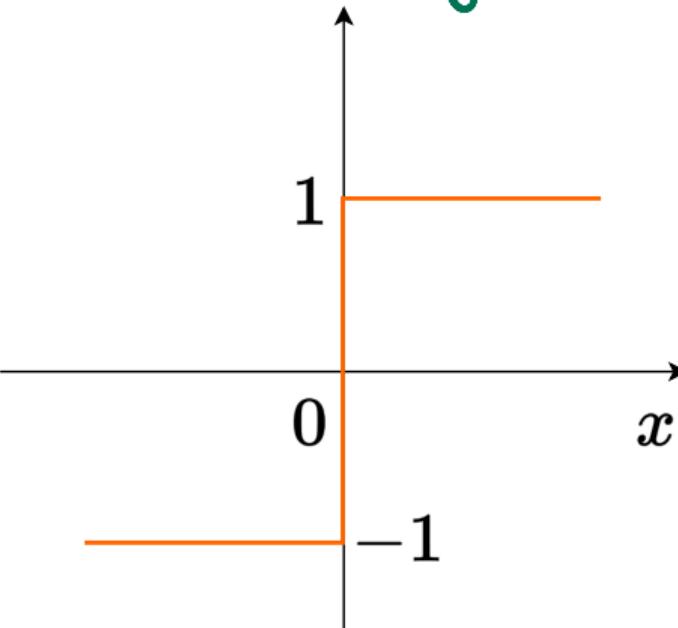


$$x_{k+1} = x_k - d_k \cdot g_k$$

субград.  
метод

$$\partial f(x)$$

$$g_k \in \partial f(x_k)$$



## Свойства субдифференциала

- Если  $x_0 \in \text{ri}(S)$ , то  $\partial f(x_0)$  является выпуклым компактным множеством.

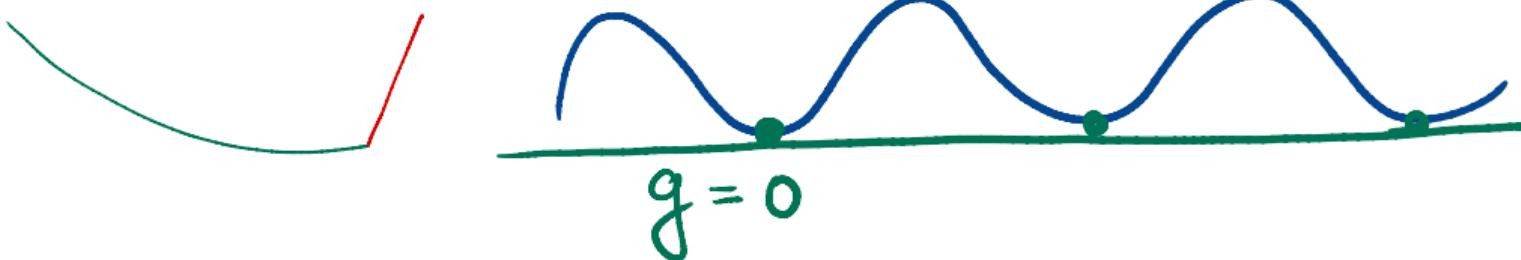
## Свойства субдифференциала

- Если  $x_0 \in \text{ri}(S)$ , то  $\partial f(x_0)$  является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$ .

$x_0$  внутри мн-ва  
определени

## Свойства субдифференциала

- Если  $x_0 \in \text{ri}(S)$ , то  $\partial f(x_0)$  является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$ .
- Если  $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$ , то  $f(x)$  выпукла на  $S$ .



## Свойства субдифференциала

- Если  $x_0 \in \text{ri}(S)$ , то  $\partial f(x_0)$  является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$ .
- Если  $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$ , то  $f(x)$  выпукла на  $S$ .

## Свойства субдифференциала

- Если  $x_0 \in \text{ri}(S)$ , то  $\partial f(x_0)$  является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$ .
- Если  $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$ , то  $f(x)$  выпукла на  $S$ .

Субдифференциал дифференцируемой функции

*х0 внутри (не на границе)*

Пусть  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  — функция, определенная на множестве  $S$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Если  $x_0 \in \text{ri}(S)$  и  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то либо  $\partial f(x_0) = \emptyset$ , либо  $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$ . Более того, если функция  $f$  выпукла, то первая ситуация невозможна.

## Свойства субдифференциала

- Если  $x_0 \in \text{ri}(S)$ , то  $\partial f(x_0)$  является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$ .
- Если  $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$ , то  $f(x)$  выпукла на  $S$ .

### Субдифференциал дифференцируемой функции

Пусть  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  — функция, определенная на множестве  $S$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Если  $x_0 \in \text{ri}(S)$  и  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то либо  $\partial f(x_0) = \emptyset$ , либо  $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$ . Более того, если функция  $f$  выпукла, то первая ситуация невозможна.

$-10 \leq x \leq 10$

# Вычисление субдифференциалов

сумма Никольского

$$1 + [-1; 1] = [0; 2]$$

$$[1; 2] + [10; 12] = [11; 14]$$

**i** Теорема Моро — Рокафеллара  
(субдифференциал линейной комбинации)

Пусть  $f_i(x)$  — выпуклые функции на выпуклых множествах  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Тогда

если  $\bigcap_{i=1}^n \text{ri}(S_i) \neq \emptyset$ , то функция  $f(x) =$

$\sum_{i=1}^n a_i f_i(x)$ ,  $a_i > 0$  имеет субдифференциал

$\partial_S f(x)$  на множестве  $S = \bigcap_{i=1}^n S_i$  и  $a_i > 0$

$$\partial_S f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \partial_{S_i} f_i(x).$$

$$\begin{array}{r} f(x) = x^2 \\ f(x) = |x| \end{array} \quad \begin{array}{l} + \text{был.} \\ + \text{найдено} \\ \hline + \text{был.} \\ - \text{найдено} \end{array}$$

$$\partial f(x) = \nabla f(x) = 2x$$

$$\partial(|x|) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \\ [-1; 1], & x = 0 \end{cases}$$

$$\partial(x^2 + |x|) = 2x + \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \\ [-1; 1], & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x + 1, & x > 0 \\ 2x - 1, & x < 0 \\ [-1; 1], & x = 0 \end{cases}$$

## Вычисление субдифференциалов

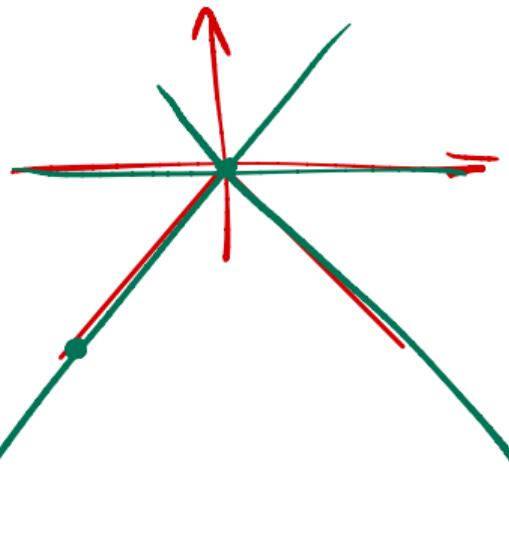
Теорема Моро — Рокафеллара  
(субдифференциал линейной комбинации)

Пусть  $f_i(x)$  — выпуклые функции на выпуклых множествах  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Тогда если  $\bigcap_{i=1}^n \text{ri}(S_i) \neq \emptyset$ , то функция  $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(x)$ ,  $a_i > 0$  имеет субдифференциал  $\partial_S f(x)$  на множестве  $S = \bigcap_{i=1}^n S_i$  и

$$\partial_S f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \partial_{S_i} f_i(x).$$

$$\partial(x^2 - \|x\|)$$

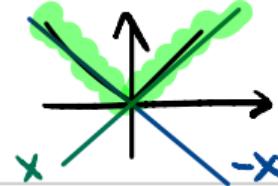
$-\|x\|$



не  
КАНАЕТ

## Вычисление субдифференциалов

$$f(x) = |x|$$



$$\max(-x, x)$$

Теорема Моро — Рокафеллара  
(субдифференциал линейной комбинации)

Пусть  $f_i(x)$  — выпуклые функции на выпуклых множествах  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Тогда если  $\bigcap_{i=1}^n \text{ri}(S_i) \neq \emptyset$ , то функция  $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(x)$ ,  $a_i > 0$  имеет субдифференциал  $\partial_S f(x)$  на множестве  $S = \bigcap_{i=1}^n S_i$  и

$$\partial_S f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \partial_{S_i} f_i(x).$$



Теорема Дубовицкого — Милютина  
(субдифференциал поточечного максимума)

Пусть  $f_i(x)$  — выпуклые функции на открытом выпуклом множестве  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $x_0 \in S$ , и поточечный максимум определяется как  $f(x) = \max_i f_i(x)$ . Тогда:

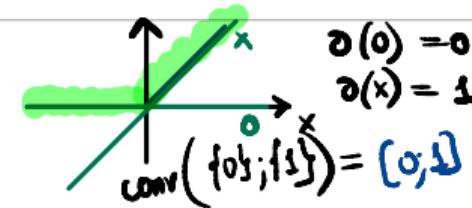
**Вып. оболочка объединяющая активных субдиф.**

$$\partial_S f(x_0) = \text{conv} \left\{ \bigcup_{i \in I(x_0)} \partial_{S_i} f_i(x_0) \right\},$$

$$I(x) = \{i \in \{1, \dots, m\} : f_i(x) = f(x)\}$$

$$f(x) = \text{ReLU}(x)$$

$$f(x) = \max(0, x)$$



$$\begin{aligned} \partial(0) &= 0 \\ \partial(x) &= 1 \\ \text{conv}\{f(0), f(1)\} &= [0, 1] \end{aligned}$$

## Вычисление субдифференциалов

- $\partial(\alpha f)(x) = \alpha \partial f(x)$  для  $\alpha \geq 0$

## Вычисление субдифференциалов

- $\partial(\alpha f)(x) = \alpha \partial f(x)$  для  $\alpha \geq 0$
- $\partial(\sum f_i)(x) = \sum \partial f_i(x)$ ,  $f_i$  — выпуклые функции

## Вычисление субдифференциалов

- $\partial(\alpha f)(x) = \alpha \partial f(x)$  для  $\alpha \geq 0$
- $\partial(\sum f_i)(x) = \sum \partial f_i(x)$ ,  $f_i$  — выпуклые функции
- $\partial(f(Ax + b))(x) = A^T \partial f(Ax + b)$ ,  $f$  — выпуклая функция

## Субградиентный метод

## Алгоритм

Вектор  $g$  называется **субградиентом** функции  $f(x) : S \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $x_0$ , если  $\forall x \in S$ :

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

## Алгоритм

Вектор  $g$  называется **субградиентом** функции  $f(x) : S \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $x_0$ , если  $\forall x \in S$ :

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Идея метода: заменить градиент  $\nabla f(x_k)$  на произвольный субградиент  $g_k \in \partial f(x_k)$ :

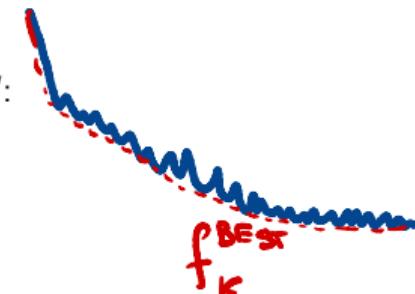
$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k,$$

где  $g_k$  — произвольный субградиент функции  $f(x)$  в точке  $x_k$ .

← субградиентный метод

## Алгоритм

НЕ  
МОНОТОННЫЙ



Вектор  $g$  называется **субградиентом** функции  $f(x) : S \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $x_0$ , если  $\forall x \in S$ :

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Идея метода: заменить градиент  $\nabla f(x_k)$  на произвольный субградиент  $g_k \in \partial f(x_k)$ :

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k,$$

где  $g_k$  — произвольный субградиент функции  $f(x)$  в точке  $x_k$ .

Субградиентный метод не является методом спуска: значение функции может расти ( $f(x_{k+1}) > f(x_k)$ ) так как антисубградиент не обязательно является направлением убывания.

Поэтому в качестве приближения решения берут лучшее найденное значение:

$$f_k^{\text{best}} = \min_{i=1, \dots, k} f(x_i).$$

## Сходимость: выпуклый случай

### Theorem

Пусть  $f$  — выпуклая функция,  $x^*$  — точка минимума. Предположим, что  $\|g_k\| \leq G$  для всех  $k$ . Тогда:

$$f_T^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2}{2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k}$$

где  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ .

Метод сходится, если:

$$\sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 < \infty, \quad \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k = \infty$$

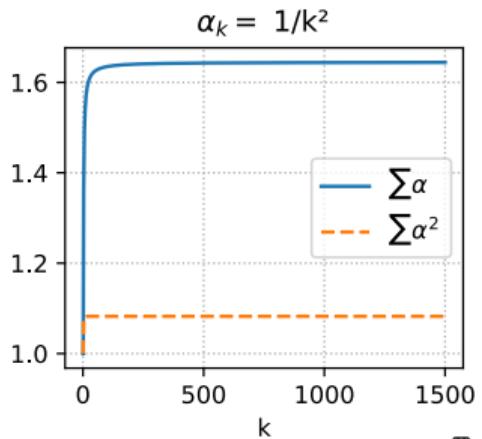
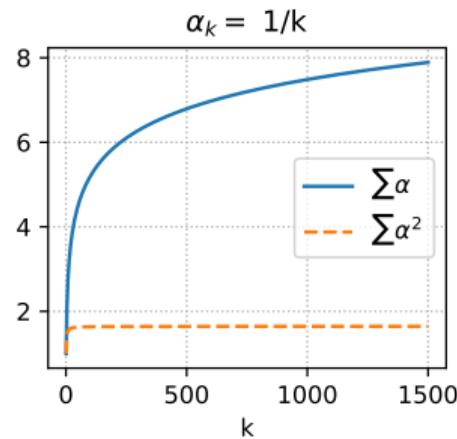
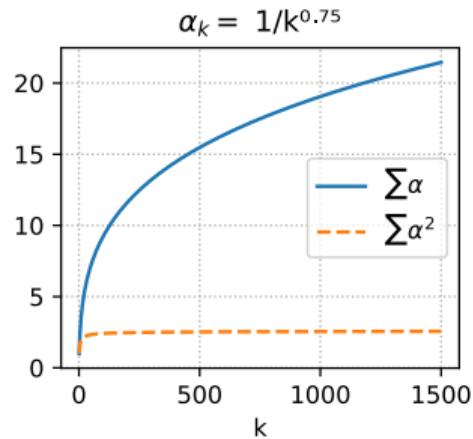
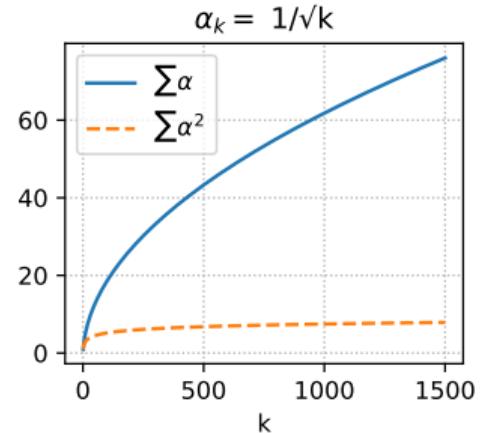
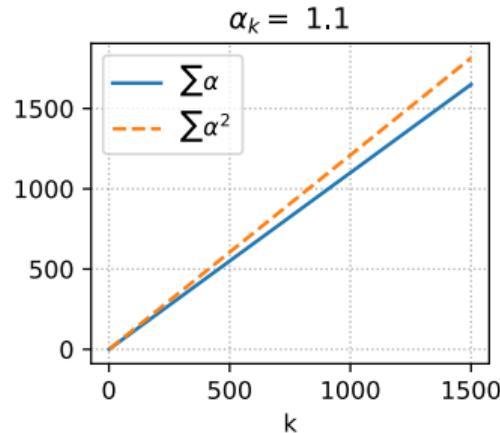
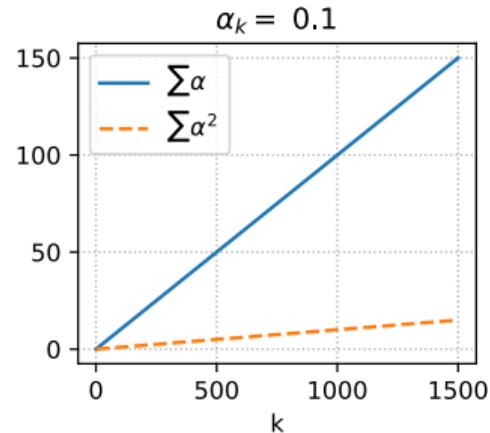
нестабильное

$$\leq \frac{R^2 + G^2 T \alpha^2}{2} =$$
$$= \frac{R^2}{2\alpha T} + \frac{G^2 \alpha}{2}$$

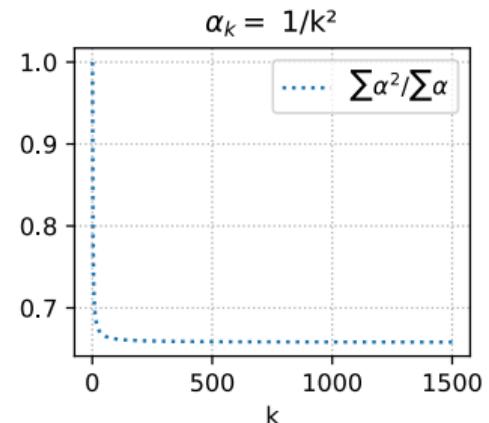
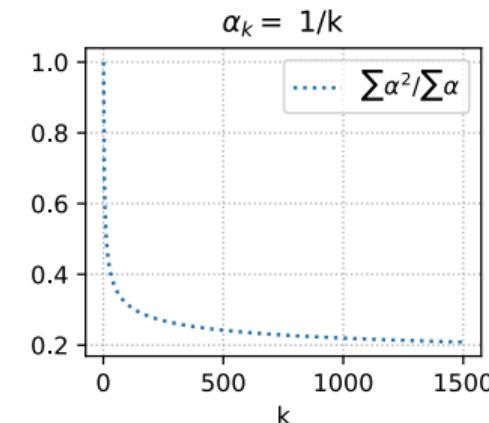
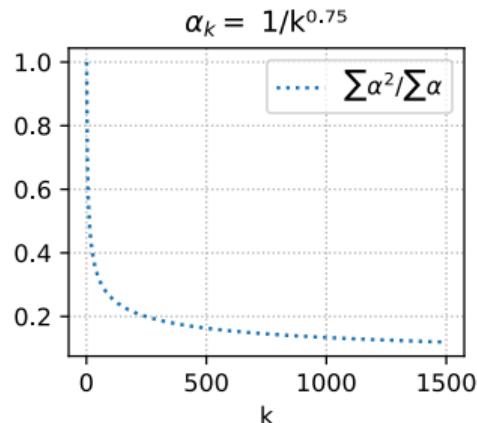
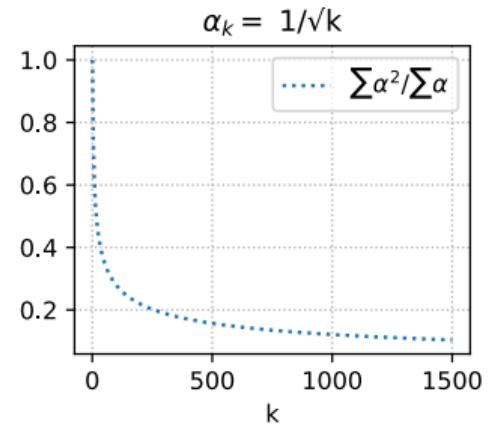
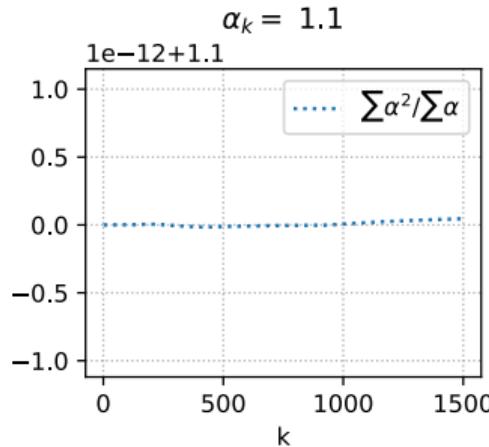
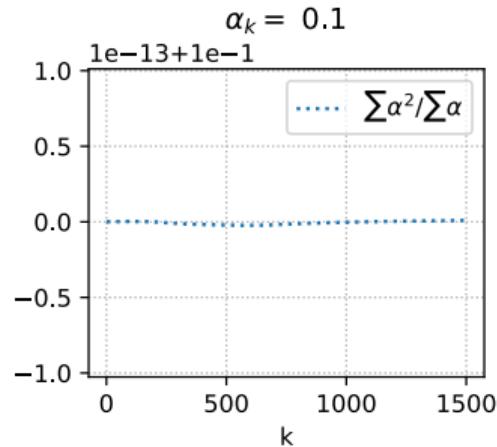
const

$\downarrow 0$   
 $T \rightarrow \infty$

## Различные стратегии выбора шага



## Различные стратегии выбора шага



## Сходимость: выпуклый случай, постоянный шаг (1)

### i Theorem

Пусть  $f$  — выпуклая  $G$ -липшицева функция и  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ . Для постоянного шага  $\alpha$ , субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2}{2\alpha k} + \frac{\alpha}{2}G^2$$

- Заметим, что с любым постоянным шагом первое слагаемое правой части убывает, но второе остается постоянным.

## Сходимость: выпуклый случай, постоянный шаг (1)

### i Theorem

Пусть  $f$  — выпуклая  $G$ -липшицева функция и  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ . Для постоянного шага  $\alpha$ , субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2}{2\alpha k} + \frac{\alpha}{2}G^2$$

- Заметим, что с любым постоянным шагом первое слагаемое правой части убывает, но второе остается постоянным.
- Замечание: существуют вариации метода, работающие и без предположения об ограниченности субградиентов (например, с нормировкой шага). См. <sup>1</sup> или <sup>2</sup>.

<sup>1</sup>B. Polyak. Introduction to Optimization. Optimization Software, Inc., 1987.

<sup>2</sup>N. Shor. Minimization Methods for Non-differentiable Functions. Springer Series in Computational Mathematics. Springer, 1985.

## Сходимость: выпуклый случай, постоянный шаг (1)

### i Theorem

Пусть  $f$  — выпуклая  $G$ -липшицева функция и  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ . Для постоянного шага  $\alpha$ , субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2}{2\alpha k} + \frac{\alpha}{2}G^2$$

- Заметим, что с любым постоянным шагом первое слагаемое правой части убывает, но второе остается постоянным.
- Замечание: существуют вариации метода, работающие и без предположения об ограниченности субградиентов (например, с нормировкой шага). См. <sup>1</sup> или <sup>2</sup>.
- Найдем оптимальный шаг  $\alpha$ , который минимизирует правую часть неравенства.

<sup>1</sup>B. Polyak. Introduction to Optimization. Optimization Software, Inc., 1987.

<sup>2</sup>N. Shor. Minimization Methods for Non-differentiable Functions. Springer Series in Computational Mathematics. Springer, 1985.

## Сходимость: выпуклый случай, постоянный шаг (2)

### Theorem

Пусть  $f$  — выпуклая  $G$ -липшицева функция и  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ . Для постоянного шага  $\alpha = \frac{R}{G} \sqrt{\frac{1}{k}}$ , субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR}{\sqrt{k}} \sim \frac{1}{\sqrt{k}}$$

медленнее, чем  
GD  $(\frac{1}{k})$

NAG  $(\frac{1}{k^2})$

- Эта версия требует знания числа итераций заранее, что не всегда практично.

## Сходимость: выпуклый случай, постоянный шаг (2)

### Theorem

Пусть  $f$  — выпуклая  $G$ -липшицева функция и  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ . Для постоянного шага  $\alpha = \frac{R}{G} \sqrt{\frac{1}{k}}$ , субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR}{\sqrt{k}}$$

- Эта версия требует знания числа итераций заранее, что не всегда практично.
- Любопытно, что, если вы будете искать оптимальный шаг на каждой итерации:  $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}$ , то получите ту же оценку.

## Сходимость: выпуклый случай, постоянный шаг (2)

### i Theorem

Пусть  $f$  — выпуклая  $G$ -липшицева функция и  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ . Для постоянного шага  $\alpha = \frac{R}{G} \sqrt{\frac{1}{k}}$ , субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR}{\sqrt{k}}$$

- Эта версия требует знания числа итераций заранее, что не всегда практично.
- Любопытно, что, если вы будете искать оптимальный шаг на каждой итерации:  $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}$ , то получите ту же оценку.
- Это связано с симметрией и выпуклостью правой части относительно  $\alpha_i$ .

## Сходимость: выпуклый случай, постоянный шаг (3)

### i Theorem

Пусть  $f$  — выпуклая  $G$ -липшицева функция и  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ . Для постоянного шага  $\gamma = \alpha_k \|g_k\|_2$ , т.е.  $\alpha_k = \frac{\gamma}{\|g_k\|_2}$ , субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR^2}{2\gamma k} + \frac{G\gamma}{2}$$

- Критерий остановки: норма субградиента не подходит (пример  $f(x) = |x|$ ). Обычно используют фиксированное число итераций.

## Сходимость: выпуклый случай, практическая стратегия

### i Theorem

Пусть  $f$  — выпуклая  $G$ -липшицева функция и  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ . Для убывающей стратегии шага  $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$ , субградиентный метод удовлетворяет

$$\alpha_k = \frac{R}{\sqrt{k+1}}$$

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}$$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{k}} \ln k$$

1. Оценка сумм:

## Сходимость: выпуклый случай, практическая стратегия

### i Theorem

Пусть  $f$  — выпуклая  $G$ -липшицева функция и  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ . Для убывающей стратегии шага  $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$ , субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}$$

#### 1. Оценка сумм:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2 = \frac{R^2}{G^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \leq \frac{R^2}{G^2} (1 + \ln k);$$

## Сходимость: выпуклый случай, практическая стратегия

### i Theorem

Пусть  $f$  — выпуклая  $G$ -липшицева функция и  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ . Для убывающей стратегии шага  $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$ , субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}$$

#### 1. Оценка сумм:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2 = \frac{R^2}{G^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \leq \frac{R^2}{G^2} (1 + \ln k); \quad \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i = \frac{R}{G} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \frac{R}{G} \int_1^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{2R}{G} (\sqrt{k+1} - 1).$$

## Сходимость: выпуклый случай, практическая стратегия

### i Theorem

Пусть  $f$  — выпуклая  $G$ -липшицева функция и  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ . Для убывающей стратегии шага  $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$ , субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}$$

#### 1. Оценка сумм:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2 = \frac{R^2}{G^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \leq \frac{R^2}{G^2} (1 + \ln k); \quad \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i = \frac{R}{G} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \frac{R}{G} \int_1^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{2R}{G} (\sqrt{k+1} - 1).$$

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2}{2 \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i}$$

## Сходимость: выпуклый случай, практическая стратегия

### i Theorem

Пусть  $f$  — выпуклая  $G$ -липшицева функция и  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ . Для убывающей стратегии шага  $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$ , субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}$$

#### 1. Оценка сумм:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2 = \frac{R^2}{G^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \leq \frac{R^2}{G^2} (1 + \ln k); \quad \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i = \frac{R}{G} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \frac{R}{G} \int_1^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{2R}{G} (\sqrt{k+1} - 1).$$

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2}{2 \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i} \leq \frac{R^2 + R^2(1 + \ln k)}{4 \frac{R}{G} (\sqrt{k+1})}$$

## Сходимость: выпуклый случай, практическая стратегия

### i Theorem

Пусть  $f$  — выпуклая  $G$ -липшицева функция и  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ . Для убывающей стратегии шага  $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$ , субградиентный метод удовлетворяет

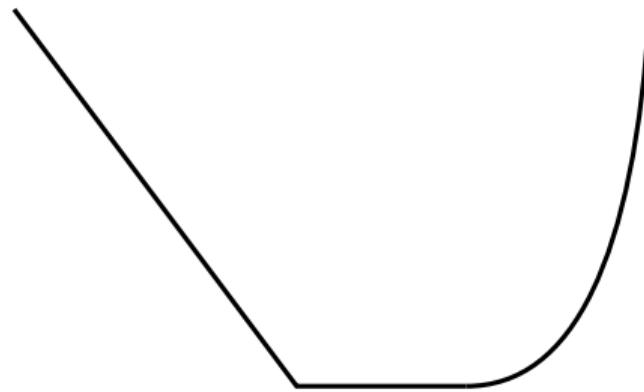
$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}$$

#### 1. Оценка сумм:

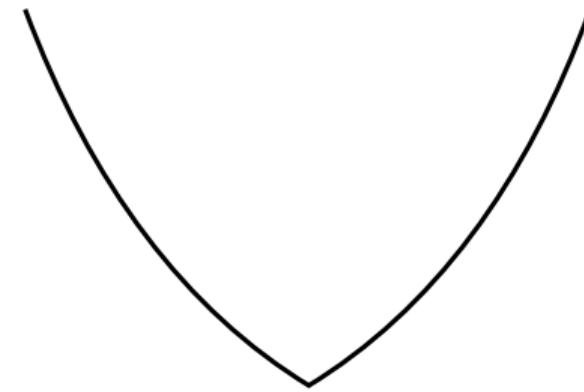
$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2 = \frac{R^2}{G^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \leq \frac{R^2}{G^2} (1 + \ln k); \quad \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i = \frac{R}{G} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \frac{R}{G} \int_1^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{2R}{G} (\sqrt{k+1} - 1).$$

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2}{2 \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i} \leq \frac{R^2 + R^2(1 + \ln k)}{4 \frac{R}{G} (\sqrt{k+1})} = \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}$$

## Разные комбинации (сильной) выпуклости и (не)гладкости

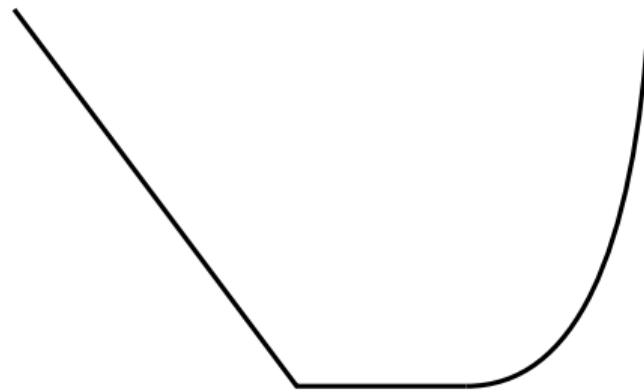


Негладкая  
Выпуклая



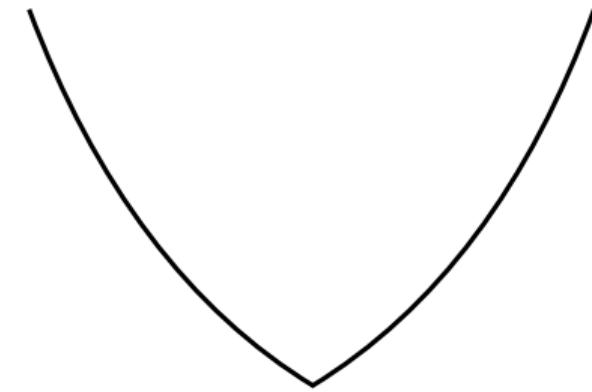
Негладкая  
 $\mu$  - сильно выпуклая

## Разные комбинации (сильной) выпуклости и (не)гладкости



Негладкая  
Выпуклая

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$



Негладкая  
 $\mu$  - сильно выпуклая

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$$

GD:  $\left(\frac{L-\mu}{L+\mu}\right)^k$   
MAG:  $\left(\frac{\mu}{L+\mu}\right)^k$

# Сильно выпуклая негладкая функция

## i Theorem

Пусть  $f$  —  $\mu$ -сильно выпуклая на выпуклом множестве и  $x, y$  — произвольные точки. Тогда для любого  $g \in \partial f(x)$ ,

$$\langle g, x - y \rangle \geq f(x) - f(y) + \frac{\mu}{2} \|x - y\|^2.$$

## Сходимость: сильно выпуклый случай

### Theorem

Пусть  $f$  —  $\mu$ -сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом  $x^*$ . Предположим, что субградиенты ограничены на траектории:  $\|g_k\| \leq G$ . Используя шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ , субградиентный метод гарантирует для  $k > 0$  что:

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

## Summary. Субградиентный метод

Тип задачи	Стратегия шага	Скорость сходимости	Сложность итераций
Выпуклые липшицевы функции	$\alpha \sim \frac{1}{\sqrt{k}}$	$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$	$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$
Сильно выпуклые функции	$\alpha \sim \frac{1}{k}$	$\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$	$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$

## Нижние оценки

выпуклые (негладкие) <sup>3</sup>	гладкие (невыпуклые) <sup>4</sup>	гладкие и выпуклые <sup>5</sup>	гладкие и сильно выпуклые (или PL) <sup>1</sup>
$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$	$\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$	$\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$	$\mathcal{O}\left(\left(\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\right)^k\right)$
$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$	$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$	$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\sqrt{\kappa} \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$

<sup>3</sup>Nesterov, Lectures on Convex Optimization

<sup>4</sup>Carmon, Duchi, Hinder, Sidford, 2017

<sup>5</sup>Nemirovski, Yudin, 1979

## Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda \left( \frac{1}{m} A^T A \right) \in [\mu; L].$$

Linear Least Squares with  $\ell_1$  Regularization (LASSO).  
m=1000, n=100,  $\lambda=0$ ,  $\mu=0$ ,  $L=10$ . Optimal sparsity: 0.0e+00

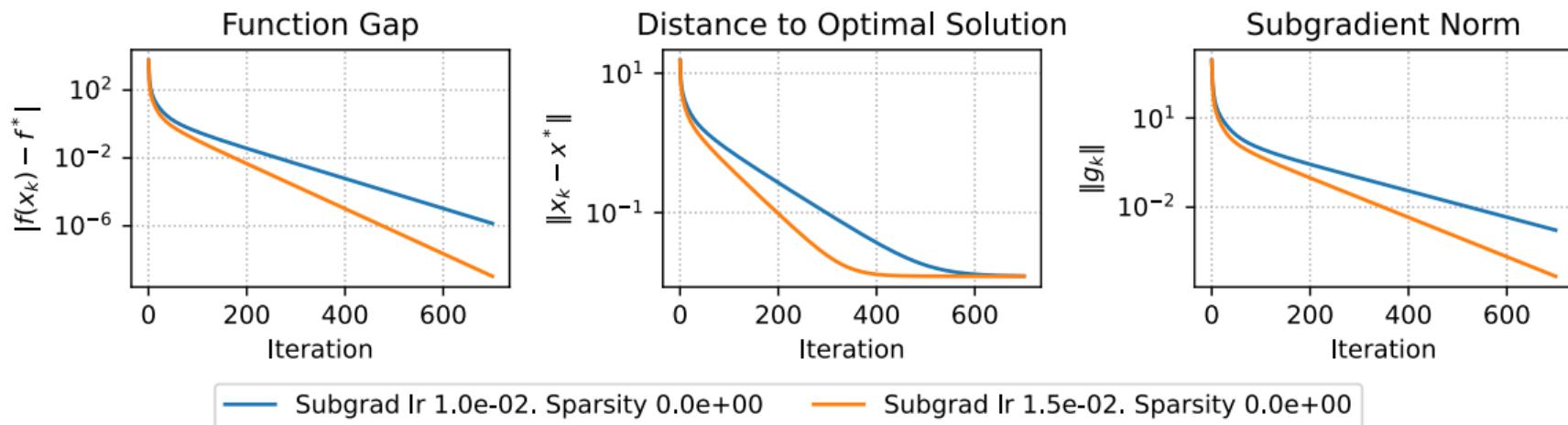


Рис. 6: Гладкий выпуклый случай. Сублинейная сходимость, не сходится в области определения

## Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda \left( \frac{1}{m} A^T A \right) \in [\mu; L].$$

Linear Least Squares with  $\ell_1$  Regularization (LASSO).  
 $m=1000, n=100, \lambda=0.1, \mu=0, L=10$ . Optimal sparsity: 1.0e-02

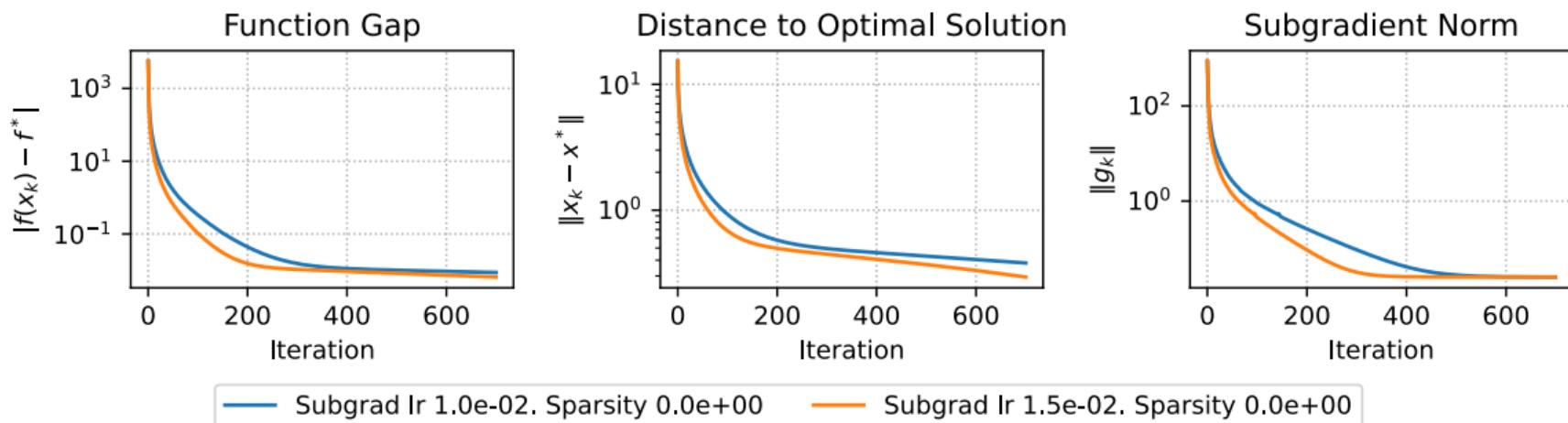


Рис. 7: Негладкий выпуклый случай. Маленькое значение  $\lambda$  приводит к негладкости. Не сходится с постоянным шагом

## Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda \left( \frac{1}{m} A^T A \right) \in [\mu; L].$$

Linear Least Squares with  $\ell_1$  Regularization (LASSO).  
 $m=1000, n=100, \lambda=1, \mu=0, L=10$ . Optimal sparsity: 7.0e-02

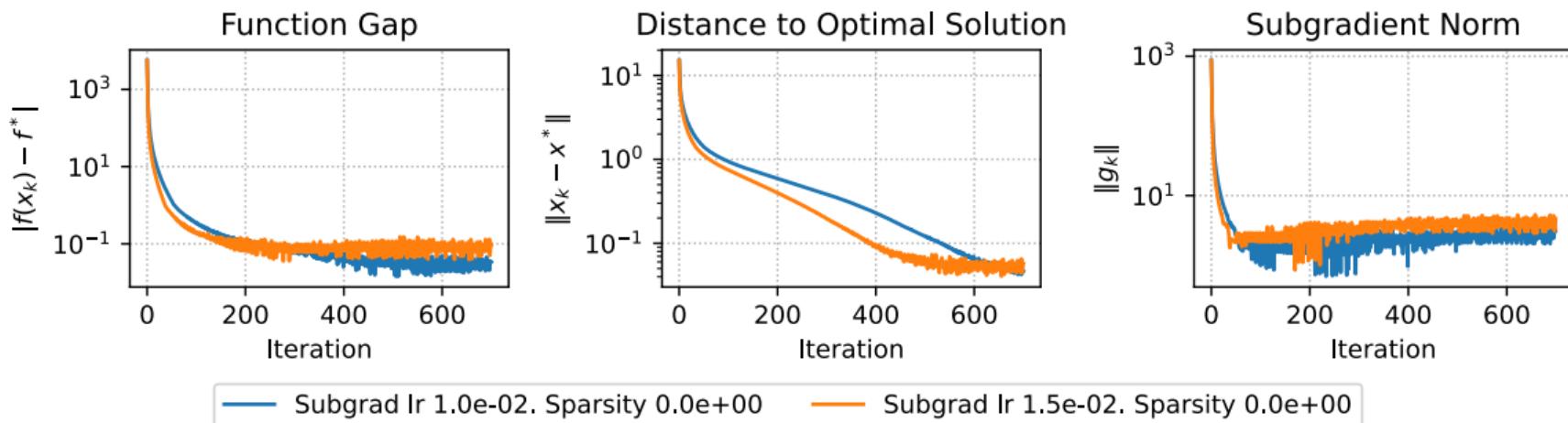


Рис. 8: Негладкий выпуклый случай. При большем значении  $\lambda$  проявляется немонотонность  $f(x_k)$ . Видно, что меньшая постоянная длина шага приводит к более низкому стационарному уровню функции.

## Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda \left( \frac{1}{m} A^T A \right) \in [\mu; L].$$

Linear Least Squares with  $\ell_1$  Regularization (LASSO).  
 $m=100, n=100, \lambda=1, \mu=0, L=10$ . Optimal sparsity:  $2.3e-01$

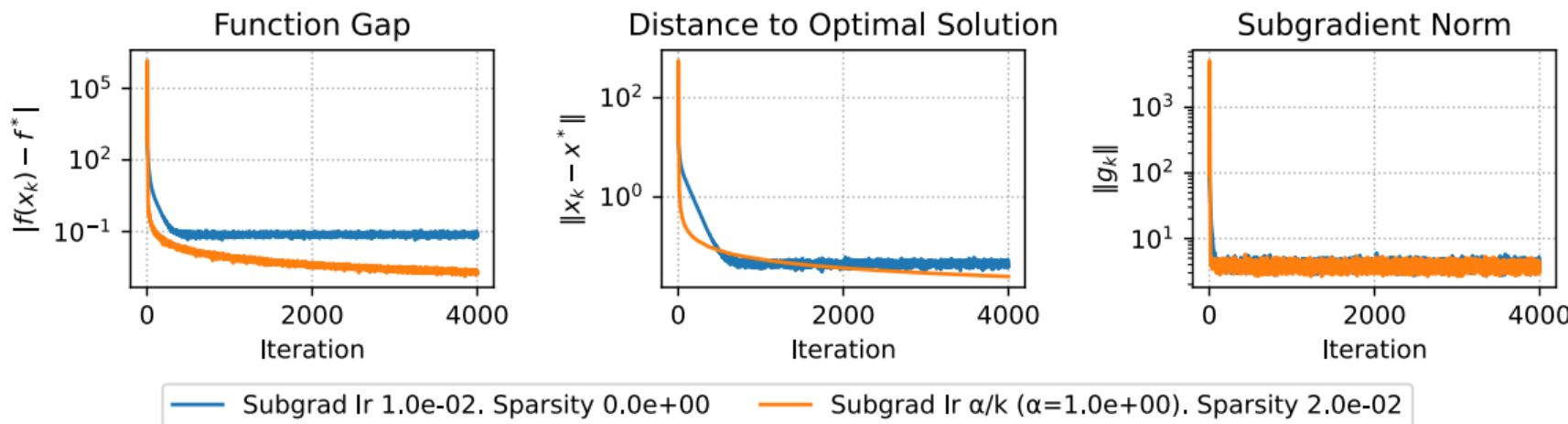


Рис. 9: Негладкий выпуклый случай. Убывающая длина шага приводит к сходимости для  $f_k^{\text{best}}$

## Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda \left( \frac{1}{m} A^T A \right) \in [\mu; L].$$

Linear Least Squares with  $\ell_1$  Regularization (LASSO).  
 $m=100, n=100, \lambda=1, \mu=0, L=10$ . Optimal sparsity: 2.3e-01

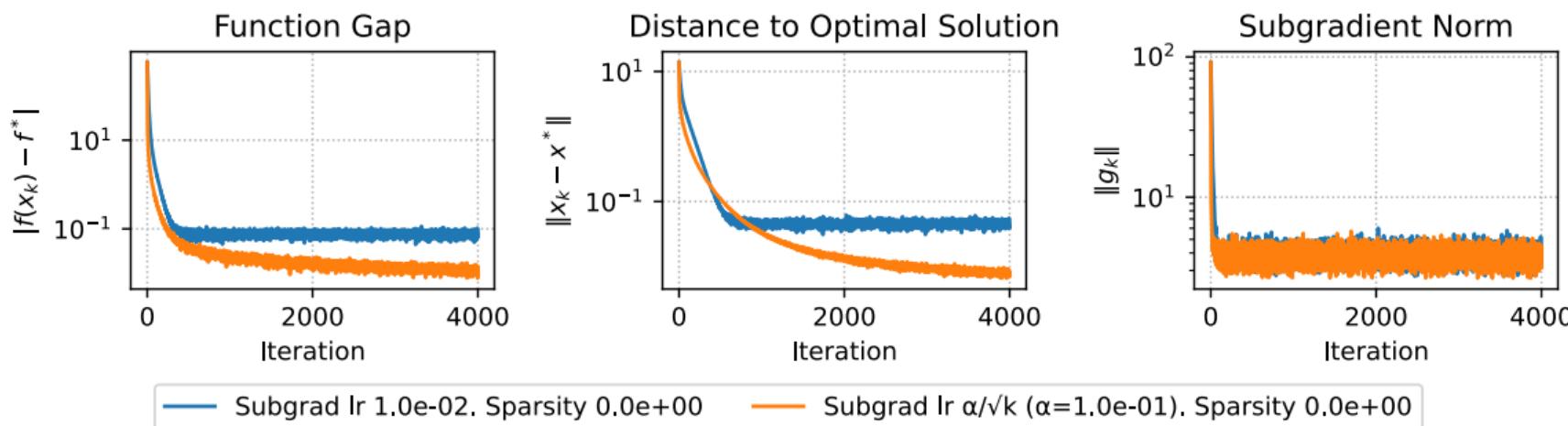


Рис. 10: Негладкий выпуклый случай.  $\frac{\alpha_0}{\sqrt{k}}$  шаг приводит к сходимости для  $f_k^{\text{best}}$

## Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda \left( \frac{1}{m} A^T A \right) \in [\mu; L].$$

Linear Least Squares with  $\ell_1$  Regularization (LASSO).  
 $m=100, n=100, \lambda=1, \mu=0, L=10$ . Optimal sparsity:  $2.3e-01$

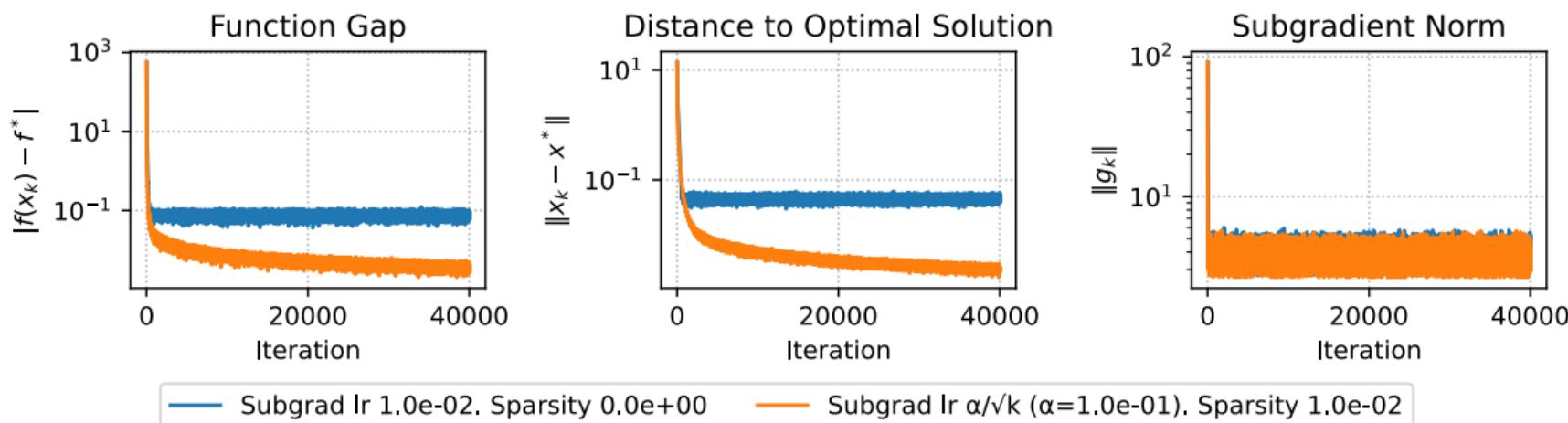


Рис. 11: Негладкий выпуклый случай.  $\frac{\alpha_0}{\sqrt{k}}$  шаг приводит к сходимости для  $f_k^{\text{best}}$

## Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda \left( \frac{1}{m} A^T A \right) \in [\mu; L].$$

Linear Least Squares with  $\ell_1$  Regularization (LASSO).  
 $m=100, n=100, \lambda=1, \mu=1, L=10$ . Optimal sparsity:  $2.0e-01$

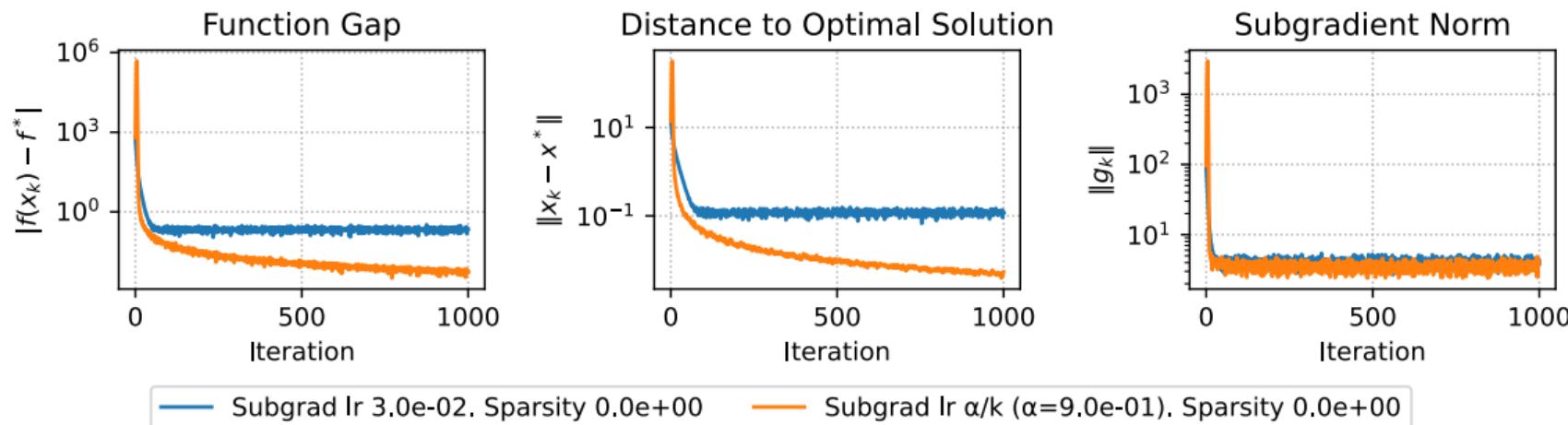


Рис. 12: Негладкий сильно выпуклый случай.  $\frac{\alpha_0}{k}$  шаг приводит к сходимости для  $f_k^{\text{best}}$

## Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda \left( \frac{1}{m} A^T A \right) \in [\mu; L].$$

Linear Least Squares with  $\ell_1$  Regularization (LASSO).  
 $m=100, n=100, \lambda=1, \mu=1, L=10$ . Optimal sparsity:  $2.0\text{e-}01$

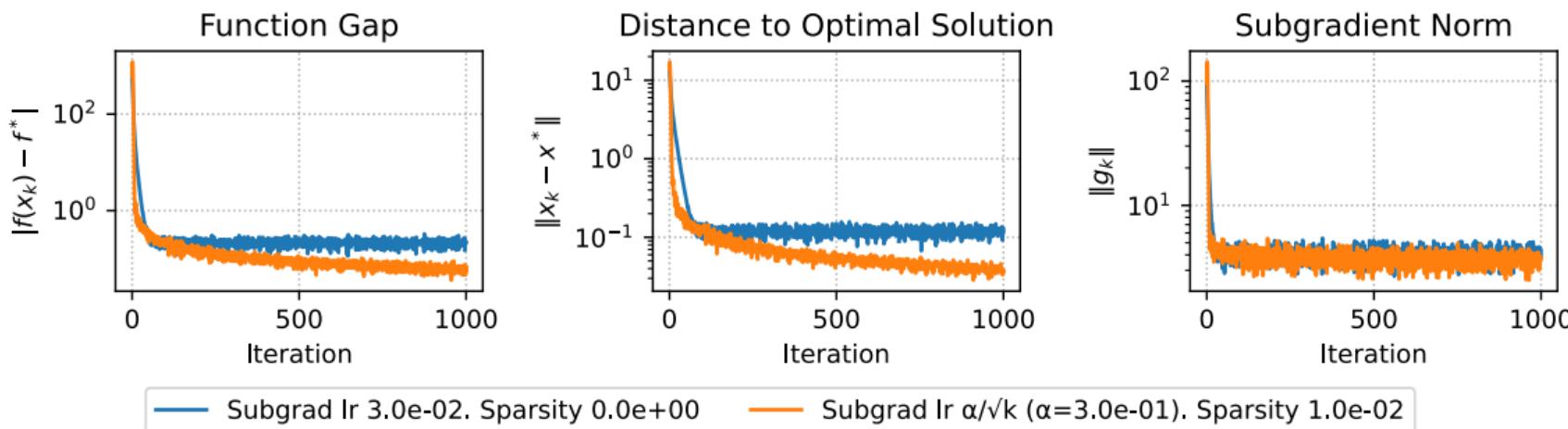


Рис. 13: Негладкий сильно выпуклый случай. Шаг  $\frac{\alpha_0}{\sqrt{k}}$  работает хуже

## Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-b_i(A_i x))) + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}$$

Binary Logistic Regression with  $\ell_1$  Regularization.  
 $m=300$ ,  $n=50$ ,  $\lambda=0.1$ . Optimal sparsity: 8.6e-01

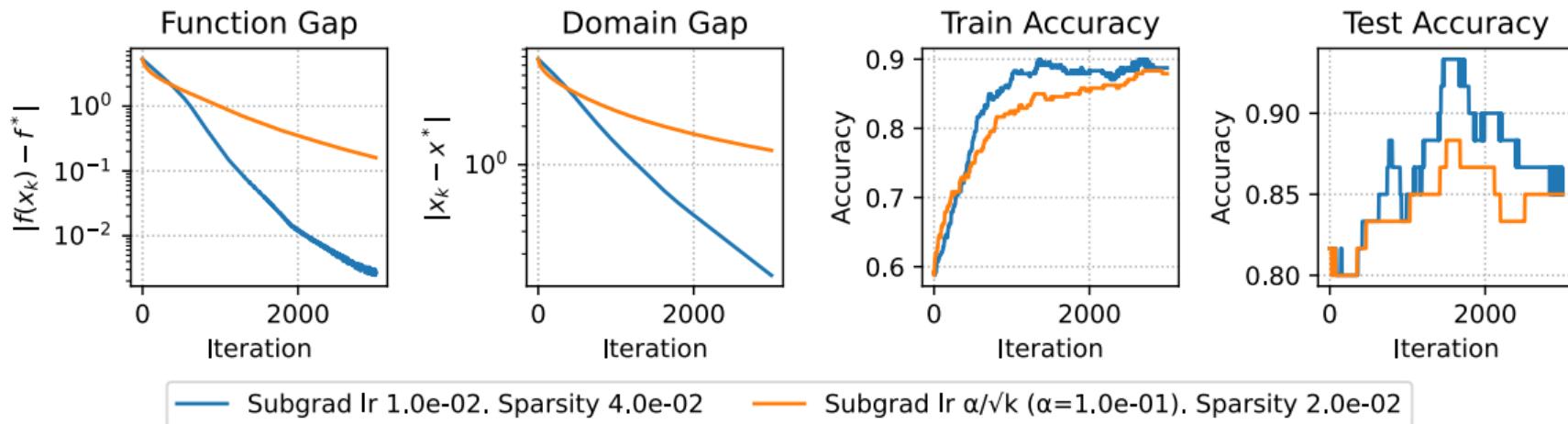


Рис. 14: Логистическая регрессия с  $\ell_1$  регуляризацией

## Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-b_i(A_i x))) + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}$$

Binary Logistic Regression with  $\ell_1$  Regularization.  
 $m=300$ ,  $n=50$ ,  $\lambda=0.1$ . Optimal sparsity: 8.6e-01

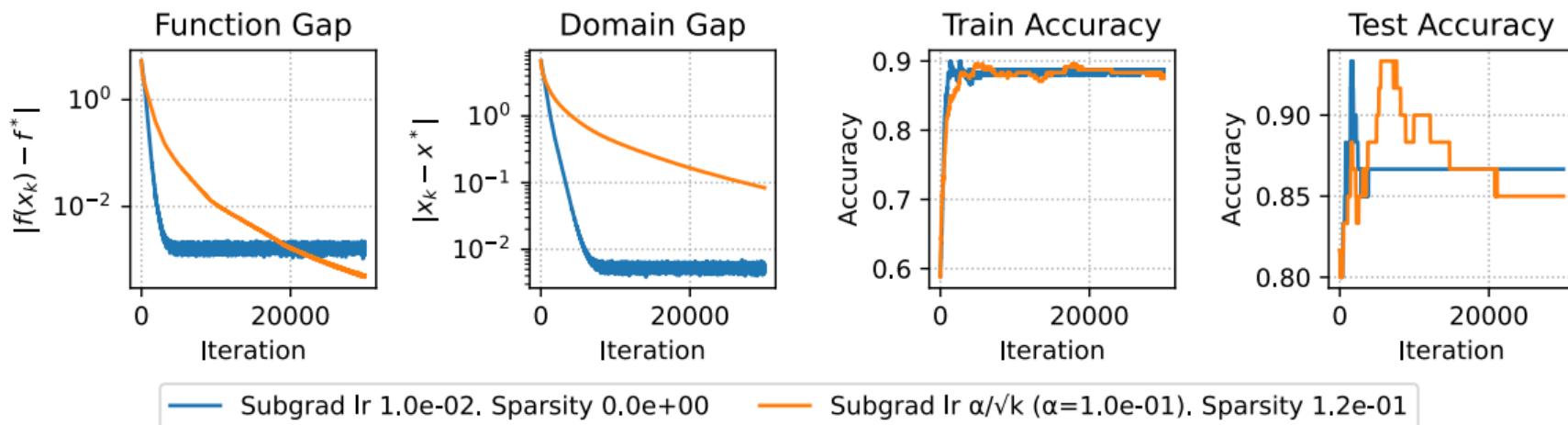


Рис. 15: Логистическая регрессия с  $\ell_1$  регуляризацией

## Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-b_i(A_i x))) + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}$$

Binary Logistic Regression with  $\ell_1$  Regularization.  
 $m=300$ ,  $n=50$ ,  $\lambda=0.25$ . Optimal sparsity: 9.6e-01

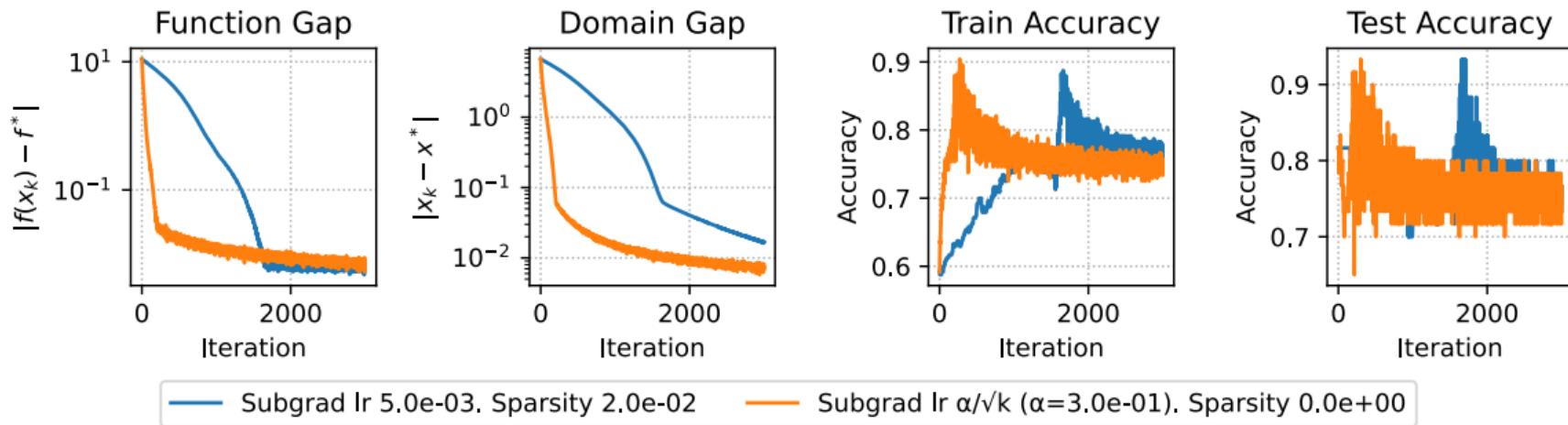


Рис. 16: Логистическая регрессия с  $\ell_1$  регуляризацией

## Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-b_i(A_i x))) + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}$$

Binary Logistic Regression with  $\ell_1$  Regularization.  
 $m=300$ ,  $n=50$ ,  $\lambda=0.25$ . Optimal sparsity: 9.6e-01

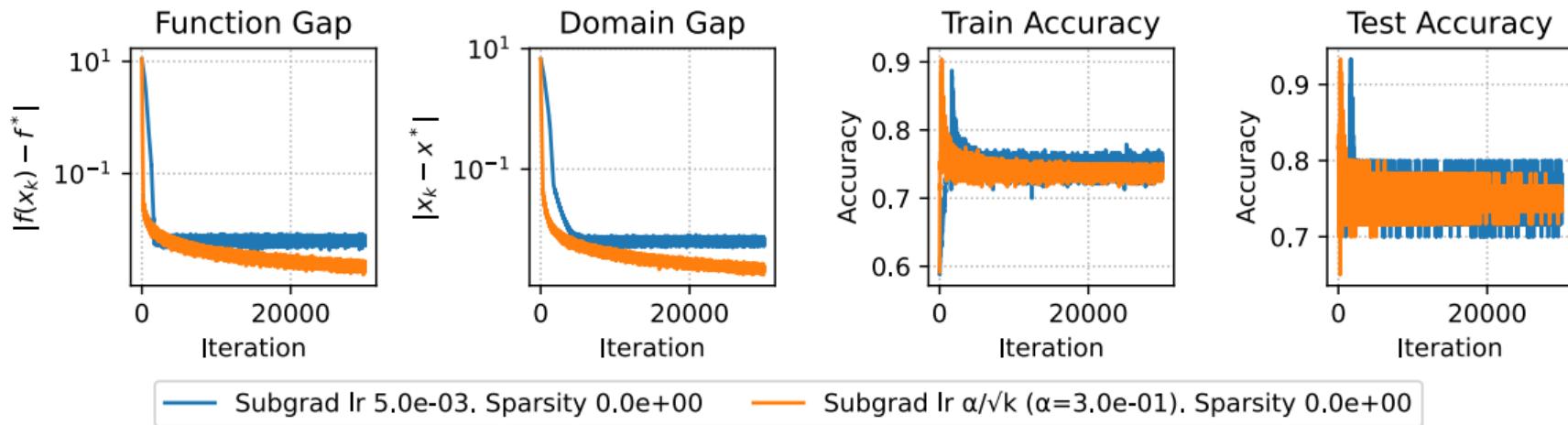


Рис. 17: Логистическая регрессия с  $\ell_1$  регуляризацией

## Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-b_i(A_i x))) + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}$$

Binary Logistic Regression with  $\ell_1$  Regularization.  
 $m=300$ ,  $n=50$ ,  $\lambda=0.27$ . Optimal sparsity:  $1.0e+00$

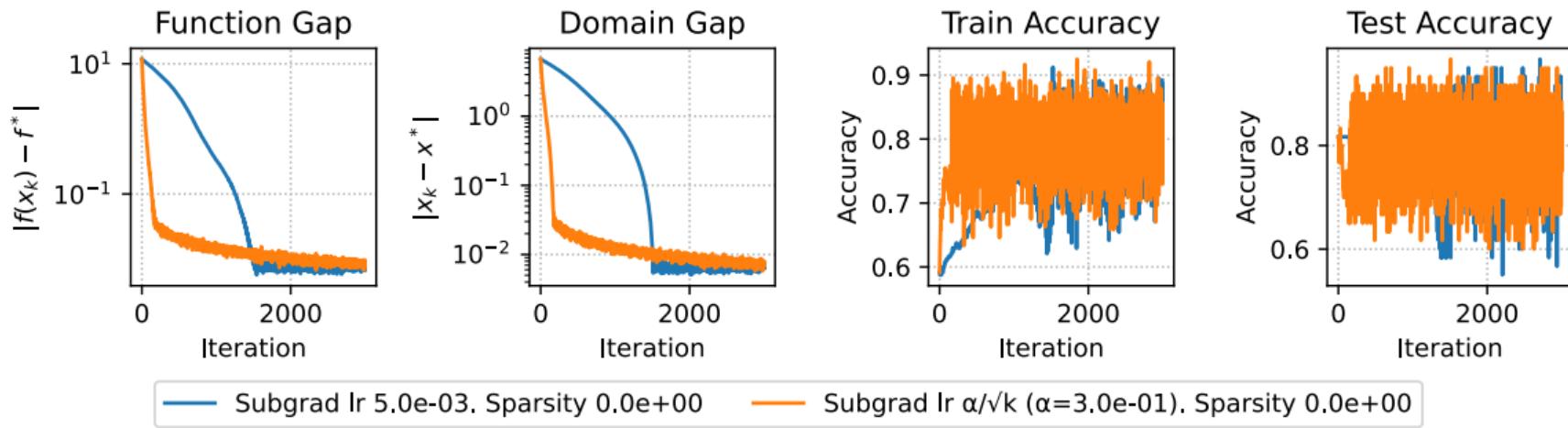


Рис. 18: Логистическая регрессия с  $\ell_1$  регуляризацией

## Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-b_i(A_i x))) + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}$$

Binary Logistic Regression with  $\ell_1$  Regularization.  
 $m=300$ ,  $n=50$ ,  $\lambda=0.27$ . Optimal sparsity:  $1.0e+00$

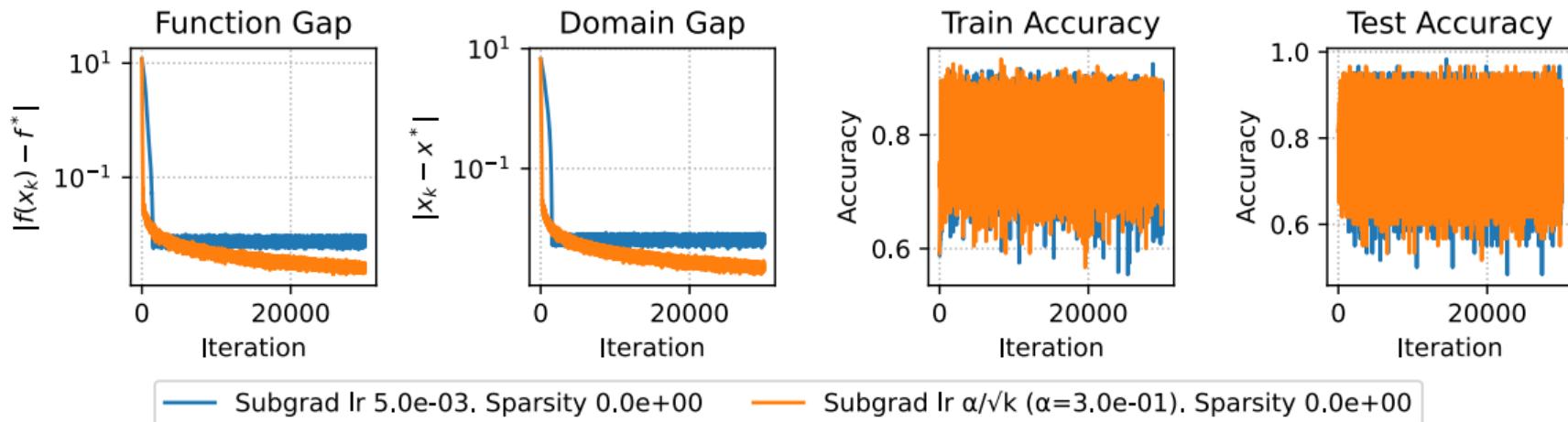


Рис. 19: Логистическая регрессия с  $\ell_1$  регуляризацией



# Субдифференциал дифференцируемой функции

## Субдифференциал дифференцируемой функции

Пусть  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  — функция, определенная на множестве  $S$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Если  $x_0 \in \text{ri}(S)$  и  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то либо  $\partial f(x_0) = \emptyset$ , либо  $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$ . Более того, если функция  $f$  выпукла, то первая ситуация невозможна.

### Доказательство

1. Пусть  $s \in \partial f(x_0)$  для некоторого  $s \in \mathbb{R}^n$ , отличного от  $\nabla f(x_0)$ . Пусть  $v \in \mathbb{R}^n$  — единичный вектор. Поскольку  $x_0$  — внутренняя точка  $S$ , существует  $\delta > 0$ , такое что  $x_0 + tv \in S$  для всех  $0 < t < \delta$ . По определению субградиента:

$$f(x_0 + tv) \geq f(x_0) + t\langle s, v \rangle$$

# Субдифференциал дифференцируемой функции

## Субдифференциал дифференцируемой функции

Пусть  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  — функция, определенная на множестве  $S$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Если  $x_0 \in \text{ri}(S)$  и  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то либо  $\partial f(x_0) = \emptyset$ , либо  $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$ . Более того, если функция  $f$  выпукла, то первая ситуация невозможна.

### Доказательство

1. Пусть  $s \in \partial f(x_0)$  для некоторого  $s \in \mathbb{R}^n$ , отличного от  $\nabla f(x_0)$ . Пусть  $v \in \mathbb{R}^n$  — единичный вектор. Поскольку  $x_0$  — внутренняя точка  $S$ , существует  $\delta > 0$ , такое что  $x_0 + tv \in S$  для всех  $0 < t < \delta$ . По определению субградиента:

$$f(x_0 + tv) \geq f(x_0) + t\langle s, v \rangle$$

# Субдифференциал дифференцируемой функции

## Субдифференциал дифференцируемой функции

Пусть  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  — функция, определенная на множестве  $S$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Если  $x_0 \in \text{ri}(S)$  и  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то либо  $\partial f(x_0) = \emptyset$ , либо  $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$ . Более того, если функция  $f$  выпукла, то первая ситуация невозможна.

### Доказательство

1. Пусть  $s \in \partial f(x_0)$  для некоторого  $s \in \mathbb{R}^n$ , отличного от  $\nabla f(x_0)$ . Пусть  $v \in \mathbb{R}^n$  — единичный вектор. Поскольку  $x_0$  — внутренняя точка  $S$ , существует  $\delta > 0$ , такое что  $x_0 + tv \in S$  для всех  $0 < t < \delta$ . По определению субградиента:

$$f(x_0 + tv) \geq f(x_0) + t\langle s, v \rangle$$

что влечёт:

$$\frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \geq \langle s, v \rangle$$

для всех  $0 < t < \delta$ . Переходя к пределу при  $t \rightarrow 0$  и используя определение градиента, получаем:

$$\langle \nabla f(x_0), v \rangle = \lim_{t \rightarrow 0; 0 < t < \delta} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \geq \langle s, v \rangle$$

# Субдифференциал дифференцируемой функции

## Субдифференциал дифференцируемой функции

Пусть  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  — функция, определенная на множестве  $S$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Если  $x_0 \in \text{ri}(S)$  и  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то либо  $\partial f(x_0) = \emptyset$ , либо  $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$ . Более того, если функция  $f$  выпукла, то первая ситуация невозможна.

### Доказательство

1. Пусть  $s \in \partial f(x_0)$  для некоторого  $s \in \mathbb{R}^n$ , отличного от  $\nabla f(x_0)$ . Пусть  $v \in \mathbb{R}^n$  — единичный вектор. Поскольку  $x_0$  — внутренняя точка  $S$ , существует  $\delta > 0$ , такое что  $x_0 + tv \in S$  для всех  $0 < t < \delta$ . По определению субградиента:

$$f(x_0 + tv) \geq f(x_0) + t\langle s, v \rangle$$

что влечёт:

$$\frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \geq \langle s, v \rangle$$

для всех  $0 < t < \delta$ . Переходя к пределу при  $t \rightarrow 0$  и используя определение градиента, получаем:

$$\langle \nabla f(x_0), v \rangle = \lim_{t \rightarrow 0; 0 < t < \delta} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \geq \langle s, v \rangle$$

## Сходимость: выпуклый случай

### i Theorem

Пусть  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — выпуклая функция, и мы используем субградиентный метод. Пусть  $\|g_k\| \leq G$  для всех  $k$ , и  $\|x_0 - x^*\| \leq R$ . Тогда для лучшего найденного значения функции  $f_T^{\text{best}} = \min_{0 \leq k < T} f(x_k)$  справедливо:

$$f_T^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2}{2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k}.$$

**Доказательство** Воспользуемся определением шага субградиентного метода  $x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k$  и неравенством, определяющим субградиент:  $f(x^*) \geq f(x_k) + \langle g_k, x^* - x_k \rangle$ :

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 = \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 =$$

## Сходимость: выпуклый случай

### i Theorem

Пусть  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — выпуклая функция, и мы используем субградиентный метод. Пусть  $\|g_k\| \leq G$  для всех  $k$ , и  $\|x_0 - x^*\| \leq R$ . Тогда для лучшего найденного значения функции  $f_T^{\text{best}} = \min_{0 \leq k < T} f(x_k)$  справедливо:

$$f_T^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2}{2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k}.$$

**Доказательство** Воспользуемся определением шага субградиентного метода  $x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k$  и неравенством, определяющим субградиент:  $f(x^*) \geq f(x_k) + \langle g_k, x^* - x_k \rangle$ :

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \end{aligned}$$

## Сходимость: выпуклый случай

### Theorem

Пусть  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — выпуклая функция, и мы используем субградиентный метод. Пусть  $\|g_k\| \leq G$  для всех  $k$ , и  $\|x_0 - x^*\| \leq R$ . Тогда для лучшего найденного значения функции  $f_T^{\text{best}} = \min_{0 \leq k < T} f(x_k)$  справедливо:

$$f_T^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2}{2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k}.$$

**Доказательство** Воспользуемся определением шага субградиентного метода  $x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k$  и неравенством, определяющим субградиент:  $f(x^*) \geq f(x_k) + \langle g_k, x^* - x_k \rangle$ :

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \end{aligned}$$

## Сходимость: выпуклый случай

### i Theorem

Пусть  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — выпуклая функция, и мы используем субградиентный метод. Пусть  $\|g_k\| \leq G$  для всех  $k$ , и  $\|x_0 - x^*\| \leq R$ . Тогда для лучшего найденного значения функции  $f_T^{\text{best}} = \min_{0 \leq k < T} f(x_k)$  справедливо:

$$f_T^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2}{2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k}.$$

**Доказательство** Воспользуемся определением шага субградиентного метода  $x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k$  и неравенством, определяющим субградиент:  $f(x^*) \geq f(x_k) + \langle g_k, x^* - x_k \rangle$ :

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \\ 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \end{aligned}$$

## Сходимость: выпуклый случай (доказательство 2)

Просуммируем неравенство по  $k$  от 0 до  $T - 1$  и воспользуемся предположением на ограниченность нормы субградиента:  $\|g_k\| \leq G$ :

$$\sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2$$

## Сходимость: выпуклый случай (доказательство 2)

Просуммируем неравенство по  $k$  от 0 до  $T - 1$  и воспользуемся предположением на ограниченность нормы субградиента:  $\|g_k\| \leq G$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k(f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\ &\leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \end{aligned}$$

## Сходимость: выпуклый случай (доказательство 2)

Просуммируем неравенство по  $k$  от 0 до  $T - 1$  и воспользуемся предположением на ограниченность нормы субградиента:  $\|g_k\| \leq G$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k(f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\ &\leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\ &\leq R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \end{aligned}$$

## Сходимость: выпуклый случай (доказательство 2)

Просуммируем неравенство по  $k$  от 0 до  $T - 1$  и воспользуемся предположением на ограниченность нормы субградиента:  $\|g_k\| \leq G$ :

$$\sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2$$

$$\leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2$$

$$\leq R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2$$

$$(f_T^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k \leq \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k(f(x_k) - f(x^*)) \leq R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2$$

## Сходимость: выпуклый случай (доказательство 2)

Просуммируем неравенство по  $k$  от 0 до  $T - 1$  и воспользуемся предположением на ограниченность нормы субградиента:  $\|g_k\| \leq G$ :

$$\sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2$$

$$\leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2$$

$$\leq R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2$$

$$(f_T^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k \leq \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k(f(x_k) - f(x^*)) \leq R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2$$

Это дает оценку

$$f_T^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum \alpha_k^2}{2 \sum \alpha_k}.$$

Отсюда следует сходимость при  $\sum \alpha_k^2 < \infty$ ,  $\sum \alpha_k = \infty$  (шаг убывает, но не слишком быстро).

# Сильно выпуклая негладкая функция

## i Theorem

Пусть  $f$  —  $\mu$ -сильно выпуклая на выпуклом множестве и  $x, y$  — произвольные точки. Тогда для любого  $g \in \partial f(x)$ ,

$$\langle g, x - y \rangle \geq f(x) - f(y) + \frac{\mu}{2} \|x - y\|^2.$$

## Доказательство

1. Для любого  $\lambda \in [0, 1)$ , из  $\mu$ -сильной выпуклости,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \frac{\mu}{2}\lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2.$$

# Сильно выпуклая негладкая функция

## i Theorem

Пусть  $f$  —  $\mu$ -сильно выпуклая на выпуклом множестве и  $x, y$  — произвольные точки. Тогда для любого  $g \in \partial f(x)$ ,

$$\langle g, x - y \rangle \geq f(x) - f(y) + \frac{\mu}{2} \|x - y\|^2.$$

## Доказательство

1. Для любого  $\lambda \in [0, 1)$ , из  $\mu$ -сильной выпуклости,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \frac{\mu}{2}\lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2.$$

2. Из неравенства субградиента в  $x$ , мы получаем

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq f(x) + \langle g, \lambda x + (1 - \lambda)y - x \rangle \quad \rightarrow \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq f(x) - (1 - \lambda)\langle g, x - y \rangle.$$

## Сильно выпуклая негладкая функция

3. Таким образом,

$$f(x) - (1 - \lambda)\langle g, x - y \rangle \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \frac{\mu}{2}\lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2$$

$$(1 - \lambda)f(x) \leq (1 - \lambda)f(y) + (1 - \lambda)\langle g, x - y \rangle - \frac{\mu}{2}\lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2$$

$$f(x) \leq f(y) + \langle g, x - y \rangle - \frac{\mu}{2}\lambda\|x - y\|^2$$

## Сильно выпуклая негладкая функция

3. Таким образом,

$$f(x) - (1 - \lambda)\langle g, x - y \rangle \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \frac{\mu}{2}\lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2$$

$$(1 - \lambda)f(x) \leq (1 - \lambda)f(y) + (1 - \lambda)\langle g, x - y \rangle - \frac{\mu}{2}\lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2$$

$$f(x) \leq f(y) + \langle g, x - y \rangle - \frac{\mu}{2}\lambda\|x - y\|^2$$

4. Переходя к пределу при  $\lambda \rightarrow 1^-$  получаем

$$f(x) \leq f(y) + \langle g, x - y \rangle - \frac{\mu}{2}\|x - y\|^2 \rightarrow \langle g, x - y \rangle \geq f(x) - f(y) + \frac{\mu}{2}\|x - y\|^2.$$

## Сходимость: сильно выпуклый случай

### i Theorem

Пусть  $f$  —  $\mu$ -сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом  $x^*$ . Предположим, что субградиенты ограничены на траектории:  $\|g_k\| \leq G$ . Используя шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ , субградиентный метод гарантирует для  $k > 0$  что:

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

### Доказательство

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

## Сходимость: сильно выпуклый случай

### Theorem

Пусть  $f$  —  $\mu$ -сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом  $x^*$ . Предположим, что субградиенты ограничены на траектории:  $\|g_k\| \leq G$ . Используя шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ , субградиентный метод гарантирует для  $k > 0$  что:

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

### Доказательство

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 = \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 =$$

## Сходимость: сильно выпуклый случай

### Theorem

Пусть  $f$  —  $\mu$ -сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом  $x^*$ . Предположим, что субградиенты ограничены на траектории:  $\|g_k\| \leq G$ . Используя шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ , субградиентный метод гарантирует для  $k > 0$  что:

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

### Доказательство

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle\end{aligned}$$

## Сходимость: сильно выпуклый случай

### Theorem

Пусть  $f$  —  $\mu$ -сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом  $x^*$ . Предположим, что субградиенты ограничены на траектории:  $\|g_k\| \leq G$ . Используя шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ , субградиентный метод гарантирует для  $k > 0$  что:

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

### Доказательство

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) - \alpha_k \mu \|x_k - x^*\|^2\end{aligned}$$

## Сходимость: сильно выпуклый случай

### Theorem

Пусть  $f$  —  $\mu$ -сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом  $x^*$ . Предположим, что субградиенты ограничены на траектории:  $\|g_k\| \leq G$ . Используя шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ , субградиентный метод гарантирует для  $k > 0$  что:

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

### Доказательство

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) - \alpha_k \mu \|x_k - x^*\|^2 \\ &= (1 - \mu \alpha_k) \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*))\end{aligned}$$

## Сходимость: сильно выпуклый случай

### Theorem

Пусть  $f$  —  $\mu$ -сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом  $x^*$ . Предположим, что субградиенты ограничены на траектории:  $\|g_k\| \leq G$ . Используя шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ , субградиентный метод гарантирует для  $k > 0$  что:

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

### Доказательство

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) - \alpha_k \mu \|x_k - x^*\|^2 \\ &= (1 - \mu \alpha_k) \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*))\end{aligned}$$

$$2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \leq (1 - \mu \alpha_k) \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2$$

## Сходимость: сильно выпуклый случай

### Theorem

Пусть  $f$  —  $\mu$ -сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом  $x^*$ . Предположим, что субградиенты ограничены на траектории:  $\|g_k\| \leq G$ . Используя шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ , субградиентный метод гарантирует для  $k > 0$  что:

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

### Доказательство

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) - \alpha_k \mu \|x_k - x^*\|^2 \\ &= (1 - \mu \alpha_k) \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*))\end{aligned}$$

$$2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \leq (1 - \mu \alpha_k) \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{1 - \mu \alpha_k}{2\alpha_k} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{1}{2\alpha_k} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{\alpha_k}{2} \|g_k\|^2$$

## Сходимость: сильно выпуклый случай

2. Подставим шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$  в неравенство:

## Сходимость: сильно выпуклый случай

2. Подставим шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$  в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

## Сходимость: сильно выпуклый случай

2. Подставим шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$  в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2$$

## Сходимость: сильно выпуклый случай

2. Подставим шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$  в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2$$

$$k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2$$

## Сходимость: сильно выпуклый случай

2. Подставим шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$  в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2$$

$$k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2$$

## Сходимость: сильно выпуклый случай

2. Подставим шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$  в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2$$

$$k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2$$

3. Суммируя неравенства для всех  $k = 0, 1, \dots, T-1$ , мы получаем:

## Сходимость: сильно выпуклый случай

2. Подставим шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$  в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2$$

$$k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2$$

3. Суммируя неравенства для всех  $k = 0, 1, \dots, T-1$ , мы получаем:

$$\sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4} \|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{T-1} \|g_k\|^2$$

## Сходимость: сильно выпуклый случай

2. Подставим шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$  в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2$$

$$k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2$$

3. Суммируя неравенства для всех  $k = 0, 1, \dots, T-1$ , мы получаем:

$$\sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4} \|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{T-1} \|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$

## Сходимость: сильно выпуклый случай

2. Подставим шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$  в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2$$

$$k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2$$

3. Суммируя неравенства для всех  $k = 0, 1, \dots, T-1$ , мы получаем:

$$\sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4} \|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{T-1} \|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$

$$(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} k = \sum_{k=0}^{T-1} k(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*))$$

## Сходимость: сильно выпуклый случай

2. Подставим шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$  в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2$$

$$k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2$$

3. Суммируя неравенства для всех  $k = 0, 1, \dots, T-1$ , мы получаем:

$$\sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4} \|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{T-1} \|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$

$$(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} k = \sum_{k=0}^{T-1} k(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \leq \sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*))$$

## Сходимость: сильно выпуклый случай

2. Подставим шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$  в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2$$

$$k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2$$

3. Суммируя неравенства для всех  $k = 0, 1, \dots, T-1$ , мы получаем:

$$\sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4} \|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{T-1} \|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$

$$(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} k = \sum_{k=0}^{T-1} k(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \leq \sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$

## Сходимость: сильно выпуклый случай

2. Подставим шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$  в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2$$

$$k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2$$

3. Суммируя неравенства для всех  $k = 0, 1, \dots, T-1$ , мы получаем:

$$\sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4} \|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{T-1} \|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$

$$(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} k = \sum_{k=0}^{T-1} k(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \leq \sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$

$$f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{G^2 T}{\mu \sum_{k=0}^{T-1} k}$$

## Сходимость: сильно выпуклый случай

2. Подставим шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$  в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2$$

$$k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2$$

3. Суммируя неравенства для всех  $k = 0, 1, \dots, T-1$ , мы получаем:

$$\sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4} \|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{T-1} \|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$

$$(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} k = \sum_{k=0}^{T-1} k(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \leq \sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$

$$f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{G^2 T}{\mu \sum_{k=0}^{T-1} k} = \frac{2G^2 T}{\mu T(T-1)}$$

## Сходимость: сильно выпуклый случай

2. Подставим шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$  в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2$$

$$k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2$$

3. Суммируя неравенства для всех  $k = 0, 1, \dots, T-1$ , мы получаем:

$$\sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4} \|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{T-1} \|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$

$$(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} k = \sum_{k=0}^{T-1} k(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \leq \sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$

$$f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{G^2 T}{\mu \sum_{k=0}^{T-1} k} = \frac{2G^2 T}{\mu T(T-1)} \quad f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$



## Нижние оценки

выпуклые (негладкие) <sup>6</sup>	гладкие (невыпуклые) <sup>7</sup>	гладкие и выпуклые <sup>8</sup>	гладкие и сильно выпуклые (или PL) <sup>1</sup>
$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$	$\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$	$\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$	$\mathcal{O}\left(\left(\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\right)^k\right)$
$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$	$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$	$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\sqrt{\kappa} \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$

<sup>6</sup>Nesterov, Lectures on Convex Optimization

<sup>7</sup>Carmon, Duchi, Hinder, Sidford, 2017

<sup>8</sup>Nemirovski, Yudin, 1979

## Модель черного ящика

Итерация градиентного спуска:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&= x_{k-1} - \alpha_{k-1} \nabla f(x_{k-1}) - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&\quad \vdots \\&= x_0 - \sum_{i=0}^k \alpha_{k-i} \nabla f(x_{k-i})\end{aligned}$$

## Модель черного ящика

Итерация градиентного спуска:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&= x_{k-1} - \alpha_{k-1} \nabla f(x_{k-1}) - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&\quad \vdots \\&= x_0 - \sum_{i=0}^k \alpha_{k-i} \nabla f(x_{k-i})\end{aligned}$$

Рассмотрим семейство методов первого порядка, где

$$\begin{aligned}x_{k+1} &\in x_0 + \text{span} \{ \nabla f(x_0), \nabla f(x_1), \dots, \nabla f(x_k) \} & f - \text{smooth} \\x_{k+1} &\in x_0 + \text{span} \{ g_0, g_1, \dots, g_k \}, \text{ where } g_i \in \partial f(x_i) & f - \text{non-smooth}\end{aligned}\tag{1}$$

## Модель черного ящика

Итерация градиентного спуска:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&= x_{k-1} - \alpha_{k-1} \nabla f(x_{k-1}) - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&\quad \vdots \\&= x_0 - \sum_{i=0}^k \alpha_{k-i} \nabla f(x_{k-i})\end{aligned}$$

Рассмотрим семейство методов первого порядка, где

$$\begin{aligned}x_{k+1} &\in x_0 + \text{span} \{ \nabla f(x_0), \nabla f(x_1), \dots, \nabla f(x_k) \} & f - \text{smooth} \\x_{k+1} &\in x_0 + \text{span} \{ g_0, g_1, \dots, g_k \}, \text{ where } g_i \in \partial f(x_i) & f - \text{non-smooth}\end{aligned}\tag{1}$$

Для получения нижней оценки построим «худшую» функцию  $f$  из соответствующего класса, на которой любой метод из семейства Уравнение 1 сходится медленно.

## Негладкий выпуклый случай

### Theorem

Существует функция  $f$ , которая является  $G$ -липшицевой и выпуклой, такая, что любой метод Уравнение 1 удовлетворяет

$$\min_{1 \leq i \leq k} f(x_i) - \min_{x \in \mathbb{B}(R)} f(x) \geq \frac{GR}{2(1 + \sqrt{k})}$$

для  $R > 0$  и  $k \leq n$ , где  $n$  — размерность задачи.

## Негладкий выпуклый случай

### Theorem

Существует функция  $f$ , которая является  $G$ -липшицевой и выпуклой, такая, что любой метод Уравнение 1 удовлетворяет

$$\min_{1 \leq i \leq k} f(x_i) - \min_{x \in \mathbb{B}(R)} f(x) \geq \frac{GR}{2(1 + \sqrt{k})}$$

для  $R > 0$  и  $k \leq n$ , где  $n$  — размерность задачи.

**Идея доказательства:** построить такую функцию  $f$ , что для любого метода Уравнение 1 получаем

$$x_k \in \text{span} \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$$

где  $e_i$  —  $i$ -й стандартный базисный вектор. На итерации  $k \leq n$ , есть по крайней мере  $n - k$  координат  $x$ , равных 0. Это позволяет нам получить оценку на ошибку.

## Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \beta \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} + \frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2,$$

где  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  — параметры, и  $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$  — первые  $k$  компонент  $x$ .

## Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \beta \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} + \frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2,$$

где  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  — параметры, и  $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$  — первые  $k$  компонент  $x$ .

**Свойства:**

- Функция  $f(x)$  является  $\alpha$ -сильно выпуклой из-за квадратичного члена  $\frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2$ .

## Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \beta \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} + \frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2,$$

где  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  — параметры, и  $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$  — первые  $k$  компонент  $x$ .

Свойства:

- Функция  $f(x)$  является  $\alpha$ -сильно выпуклой из-за квадратичного члена  $\frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2$ .
- Функция негладкая, поскольку первое слагаемое вносит недифференцируемость в точке, соответствующей максимальной координате  $x$ .

## Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \beta \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} + \frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2,$$

где  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  — параметры, и  $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$  — первые  $k$  компонент  $x$ .

Свойства:

- Функция  $f(x)$  является  $\alpha$ -сильно выпуклой из-за квадратичного члена  $\frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2$ .
- Функция негладкая, поскольку первое слагаемое вносит недифференцируемость в точке, соответствующей максимальной координате  $x$ .

## Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \beta \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} + \frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2,$$

где  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  — параметры, и  $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$  — первые  $k$  компонент  $x$ .

**Свойства:**

- Функция  $f(x)$  является  $\alpha$ -сильно выпуклой из-за квадратичного члена  $\frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2$ .
- Функция негладкая, поскольку первое слагаемое вносит недифференцируемость в точке, соответствующей максимальной координате  $x$ .

Рассмотрим субдифференциал  $f(x)$  в  $x$ :

$$\begin{aligned}\partial f(x) &= \partial \left( \beta \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} \right) + \partial \left( \frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2 \right) \\ &= \beta \partial \left( \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} \right) + \alpha x \\ &= \beta \operatorname{conv} \left\{ e_i \mid i : x^{(i)} = \max_j x^{(j)} \right\} + \alpha x\end{aligned}$$

## Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \beta \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} + \frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2,$$

где  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  — параметры, и  $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$  — первые  $k$  компонент  $x$ .

Свойства:

- Функция  $f(x)$  является  $\alpha$ -сильно выпуклой из-за квадратичного члена  $\frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2$ .
- Функция негладкая, поскольку первое слагаемое вносит недифференцируемость в точке, соответствующей максимальной координате  $x$ .

Рассмотрим субдифференциал  $f(x)$  в  $x$ :

$$\begin{aligned}\partial f(x) &= \partial \left( \beta \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} \right) + \partial \left( \frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2 \right) \\ &= \beta \partial \left( \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} \right) + \alpha x \\ &= \beta \operatorname{conv} \left\{ e_i \mid i : x^{(i)} = \max_j x^{(j)} \right\} + \alpha x\end{aligned}$$

Легко видеть, что если  $g \in \partial f(x)$  и  $\|x\| \leq R$ , то  
 $\|g\| \leq \alpha R + \beta$

Таким образом,  $f$  является  $\alpha R + \beta$ -липшицевой на  $B(R)$ .

## Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Далее опишем оракул первого порядка для этой функции. При запросе субградиента в точке  $x$  оракул возвращает:

$$\alpha x + \gamma e_i,$$

где  $i$  — наименьший индекс, на котором достигается максимум  $x^{(i)} = \max_{1 \leq j \leq k} x^{(j)}$ .

- Пусть  $x_0 = 0$ .

## Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Далее опишем оракул первого порядка для этой функции. При запросе субградиента в точке  $x$  оракул возвращает:

$$\alpha x + \gamma e_i,$$

где  $i$  — наименьший индекс, на котором достигается максимум  $x^{(i)} = \max_{1 \leq j \leq k} x^{(j)}$ .

- Пусть  $x_0 = 0$ .
- При запросе оракула в  $x_0 = 0$ , он возвращает  $e_1$ . Следовательно,  $x_1$  лежит на прямой, порождённой  $e_1$ .

## Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Далее опишем оракул первого порядка для этой функции. При запросе субградиента в точке  $x$  оракул возвращает:

$$\alpha x + \gamma e_i,$$

где  $i$  — наименьший индекс, на котором достигается максимум  $x^{(i)} = \max_{1 \leq j \leq k} x^{(j)}$ .

- Пусть  $x_0 = 0$ .
- При запросе оракула в  $x_0 = 0$ , он возвращает  $e_1$ . Следовательно,  $x_1$  лежит на прямой, порождённой  $e_1$ .
- Индукцией по  $i$  можно показать, что  $x_i \in \text{span}\{e_1, \dots, e_i\}$ . В частности, для  $i \leq k$ ,  $k+1$ -я координата  $x_i$  равна нулю и вследствие структуры  $f(x)$ :

$$f(x_i) \geq 0.$$

## Негладкий выпуклый случай (доказательство)

- Найдем минимум функции  $f$ . Определим точку  $y \in \mathbb{R}^n$ :

$$y^{(i)} = -\frac{\beta}{\alpha k} \quad \text{for } 1 \leq i \leq k, \quad y^{(i)} = 0 \quad \text{for } k+1 \leq i \leq n.$$

## Негладкий выпуклый случай (доказательство)

- Найдем минимум функции  $f$ . Определим точку  $y \in \mathbb{R}^n$ :

$$y^{(i)} = -\frac{\beta}{\alpha k} \quad \text{for } 1 \leq i \leq k, \quad y^{(i)} = 0 \quad \text{for } k+1 \leq i \leq n.$$

- Заметим, что  $0 \in \partial f(y)$ :

$$\begin{aligned}\partial f(y) &= \alpha y + \beta \operatorname{conv} \left\{ e_i \mid i : y^{(i)} = \max_j y^{(j)} \right\} \\ &= \alpha y + \beta \operatorname{conv} \left\{ e_i \mid i : y^{(i)} = 0 \right\} \\ &0 \in \partial f(y).\end{aligned}$$

## Негладкий выпуклый случай (доказательство)

- Найдем минимум функции  $f$ . Определим точку  $y \in \mathbb{R}^n$ :

$$y^{(i)} = -\frac{\beta}{\alpha k} \quad \text{for } 1 \leq i \leq k, \quad y^{(i)} = 0 \quad \text{for } k+1 \leq i \leq n.$$

- Заметим, что  $0 \in \partial f(y)$ :

$$\begin{aligned}\partial f(y) &= \alpha y + \beta \operatorname{conv} \left\{ e_i \mid i : y^{(i)} = \max_j y^{(j)} \right\} \\ &= \alpha y + \beta \operatorname{conv} \left\{ e_i \mid i : y^{(i)} = 0 \right\} \\ &0 \in \partial f(y).\end{aligned}$$

- Следовательно, минимальное значение  $f = f(y) = f(x^*)$  равно

$$f(y) = -\frac{\beta^2}{\alpha k} + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha^2 k} = -\frac{\beta^2}{2\alpha k}.$$

## Негладкий выпуклый случай (доказательство)

- Найдем минимум функции  $f$ . Определим точку  $y \in \mathbb{R}^n$ :

$$y^{(i)} = -\frac{\beta}{\alpha k} \quad \text{for } 1 \leq i \leq k, \quad y^{(i)} = 0 \quad \text{for } k+1 \leq i \leq n.$$

- Заметим, что  $0 \in \partial f(y)$ :

$$\begin{aligned}\partial f(y) &= \alpha y + \beta \operatorname{conv} \left\{ e_i \mid i : y^{(i)} = \max_j y^{(j)} \right\} \\ &= \alpha y + \beta \operatorname{conv} \left\{ e_i \mid i : y^{(i)} = 0 \right\} \\ &0 \in \partial f(y).\end{aligned}$$

- Следовательно, минимальное значение  $f = f(y) = f(x^*)$  равно

$$f(y) = -\frac{\beta^2}{\alpha k} + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha^2 k} = -\frac{\beta^2}{2\alpha k}.$$

- Теперь мы получаем:

$$f(x_i) - f(x^*) \geq 0 - \left( -\frac{\beta^2}{2\alpha k} \right) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k}.$$

## Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Имеем оценку снизу  $f(x_i) - f(x^*) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k}$ , что (при правильном выборе параметров) совпадает с требуемой  $\frac{GR}{2(1+\sqrt{k})}$ .

## Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Имеем оценку снизу  $f(x_i) - f(x^*) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k}$ , что (при правильном выборе параметров) совпадает с требуемой  $\frac{GR}{2(1+\sqrt{k})}$ .

### Выпуклый случай

$$\alpha = \frac{G}{R} \frac{1}{1 + \sqrt{k}} \quad \beta = \frac{\sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}}$$

$$\frac{\beta^2}{2\alpha} = \frac{GRk}{2(1 + \sqrt{k})}$$

Заметим, в частности, что  $\|y\|_2^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2 k} = R^2$  с этими параметрами

$$\min_{1 \leq i \leq k} f(x_i) - f(x^*) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k} = \frac{GR}{2(1 + \sqrt{k})}$$

## Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Имеем оценку снизу  $f(x_i) - f(x^*) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k}$ , что (при правильном выборе параметров) совпадает с требуемой  $\frac{GR}{2(1+\sqrt{k})}$ .

### Выпуклый случай

$$\alpha = \frac{G}{R} \frac{1}{1 + \sqrt{k}} \quad \beta = \frac{\sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}}$$

$$\frac{\beta^2}{2\alpha} = \frac{GRk}{2(1 + \sqrt{k})}$$

Заметим, в частности, что  $\|y\|_2^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2 k} = \frac{G^2}{4\alpha^2 k} = R^2$  с этими параметрами

$$\min_{1 \leq i \leq k} f(x_i) - f(x^*) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k} = \frac{GR}{2(1 + \sqrt{k})}$$

### Сильно выпуклый случай

$$\alpha = \frac{G}{2R} \quad \beta = \frac{G}{2}$$

Заметим, в частности, что  $\|y\|_2^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2 k} = \frac{G^2}{4\alpha^2 k} = R^2$  с этими параметрами

$$\min_{1 \leq i \leq k} f(x_i) - f(x^*) \geq \frac{G^2}{8\alpha k}$$

## Ссылки

- Subgradient Methods Stephen Boyd (with help from Jaehyun Park)