

Градиентные методы в условных задачах
оптимизации - метод проекции градиента.
Метод Франк - Вульфа.

Даня Меркулов

Оптимизация для всех! ЦУ

Методы оптимизации в условных задачах

Условная оптимизация

Безусловная оптимизация

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

- Любая точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ является допустимой и может быть решением.

Условная оптимизация

Безусловная оптимизация

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

- Любая точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ является допустимой и может быть решением.

Условная оптимизация

Безусловная оптимизация

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

- Любая точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ является допустимой и может быть решением.

Условная оптимизация

$$\min_{x \in S} f(x)$$

- Не все точки $x \in \mathbb{R}^n$ являются допустимыми и могут быть решением.

Бюджетное
МН-во

Условная оптимизация

Безусловная оптимизация

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

- Любая точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ является допустимой и может быть решением.

Условная оптимизация

$$\min_{x \in S} f(x)$$

- Не все точки $x \in \mathbb{R}^n$ являются допустимыми и могут быть решением.
- Решение должно быть внутри множества S .

Условная оптимизация

Безусловная оптимизация

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

- Любая точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ является допустимой и может быть решением.

Условная оптимизация

$$\min_{x \in S} f(x)$$

- Не все точки $x \in \mathbb{R}^n$ являются допустимыми и могут быть решением.
- Решение должно быть внутри множества S .
- Пример:

$$\frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 \rightarrow \min_{\|x\|_2^2 \leq 1}$$

$$\|x\|_2^2 < 1$$

Условная оптимизация

Безусловная оптимизация

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

- Любая точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ является допустимой и может быть решением.

Условная оптимизация

$$\min_{x \in S} f(x)$$

- Не все точки $x \in \mathbb{R}^n$ являются допустимыми и могут быть решением.
- Решение должно быть внутри множества S .
- Пример:

$$\frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 \rightarrow \min_{\|x\|_2^2 \leq 1}$$

Условная оптимизация

Безусловная оптимизация

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

- Любая точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ является допустимой и может быть решением.

Условная оптимизация

$$\min_{x \in S} f(x)$$

- Не все точки $x \in \mathbb{R}^n$ являются допустимыми и могут быть решением.
- Решение должно быть внутри множества S .
- Пример:

$$\frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 \rightarrow \min_{\|x\|_2^2 \leq 1}$$

Градиентный спуск - хороший способ решать безусловные задачи

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \quad (\text{GD})$$

Можно ли его скорректировать для решения условных задач?

Да. Нужно использовать проекции, чтобы обеспечить допустимость на каждой итерации.

Идея метода проекции градиента

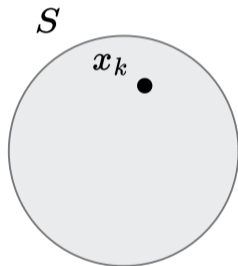


Рис. 1: Предположим, что мы начинаем с точки x_k .

Идея метода проекции градиента

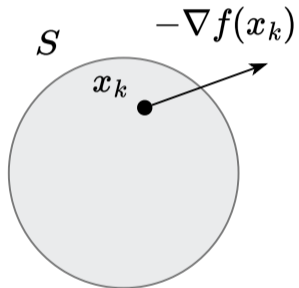


Рис. 2: И идем в направлении $-\nabla f(x_k)$.

Идея метода проекции градиента

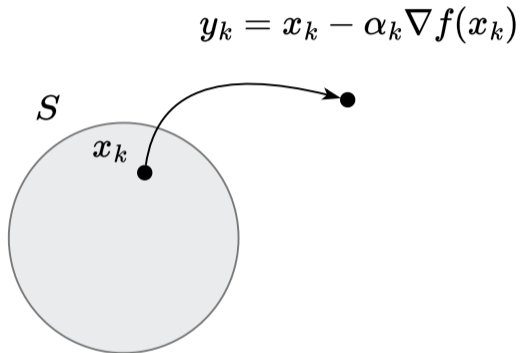


Рис. 3: Иногда мы можем оказаться вне допустимого множества.

Идея метода проекции градиента

PGD

Велич	μ -сильн.
$\frac{1}{K}$	лин. $\sim (1 - \frac{\mu}{L})^K$

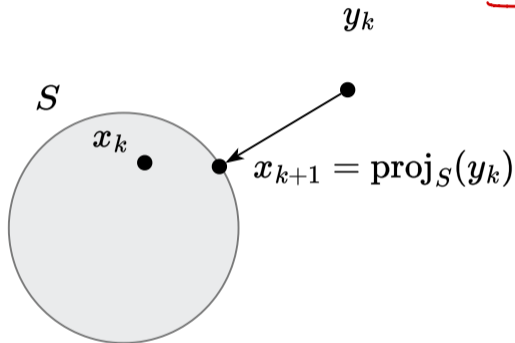


Рис. 4: Решим эту небольшую проблемку с помощью проекции!

Идея метода проекции градиента

$$x_{k+1} = \text{proj}_S(x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)) \Leftrightarrow \begin{aligned} y_k &= x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \\ x_{k+1} &= \text{proj}_S(y_k) \end{aligned}$$

градиентный шаг
шаг проекции

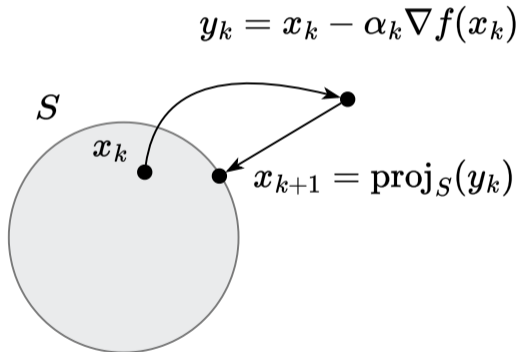


Рис. 5: Иллюстрация алгоритма проекции градиента

Пример: White-box Adversarial Attacks

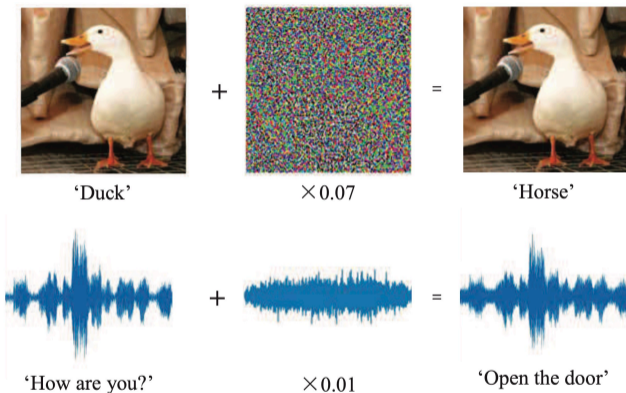
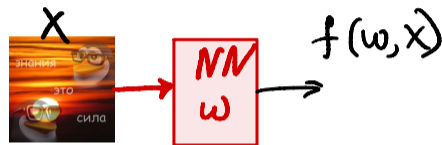


Рис. 6: Источник

- Математически, нейронная сеть - это функция $f(w; x)$



Пример: White-box Adversarial Attacks

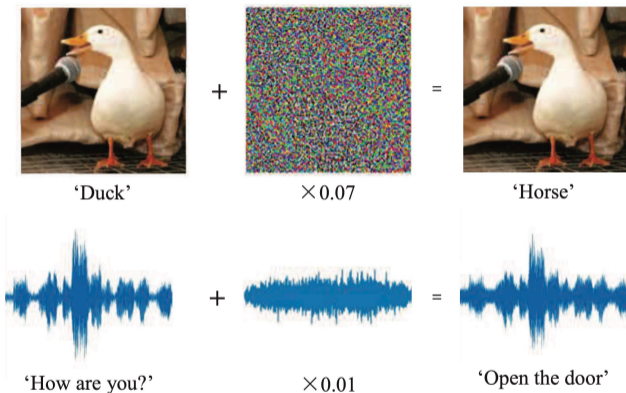


Рис. 6: Источник

- Математически, нейронная сеть - это функция $f(w; x)$
- Обычно, вход x задается, а оптимизируются веса сети w

Пример: White-box Adversarial Attacks

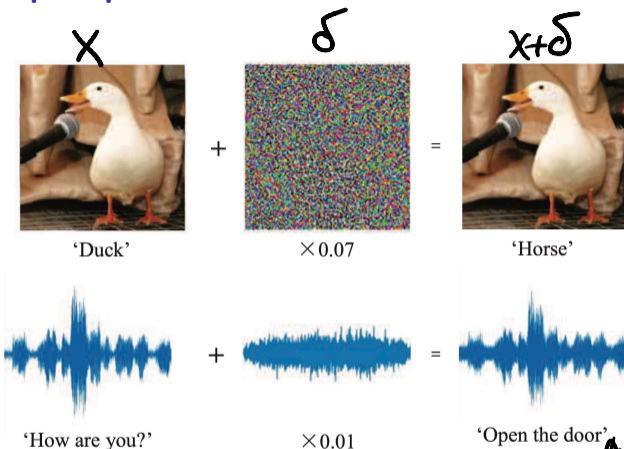


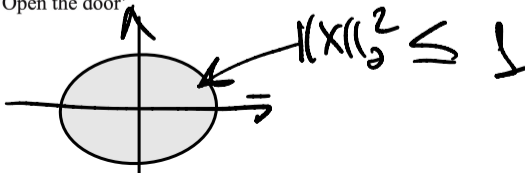
Рис. 6: Источник

- Математически, нейронная сеть - это функция $f(w; x)$
- Обычно, вход x задается, а оптимизируются веса сети w
- Можно наоборот: зафиксировать веса w и оптимизировать вход x враждебным образом:

$$\min_{\delta} \text{size}(\delta) \quad \text{s.t.} \quad \text{pred}[f(w; x + \delta)] \neq y$$

или

$$\max_{\delta} l(w; x + \delta, y) \quad \text{s.t.} \quad \text{size}(\delta) \leq \epsilon, \quad 0 \leq x + \delta \leq 1$$

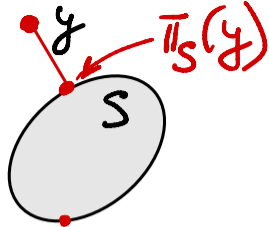


Проекция

Проекция

Расстояние d от точки $y \in \mathbb{R}^n$ до замкнутого множества $S \subset \mathbb{R}^n$:

$$d(y, S, \|\cdot\|) = \inf\{\|x - y\| \mid x \in S\}$$



Проекция

Расстояние d от точки $y \in \mathbb{R}^n$ до замкнутого множества $S \subset \mathbb{R}^n$:

$$d(y, S, \|\cdot\|) = \inf\{\|x - y\| \mid x \in S\}$$

Мы будем фокусироваться на евклидовой проекции (возможны другие варианты) точки $y \in \mathbb{R}^n$ на множество $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - это точка $\text{proj}_S(y) \in S$:

$$\text{proj}_S(y) = \Pi_S(y) = \underset{x \in S}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|x - y\|_2^2$$

Проекция

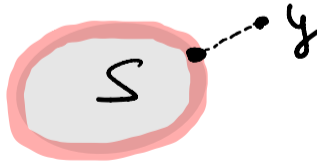
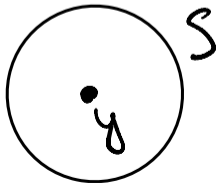
Расстояние d от точки $y \in \mathbb{R}^n$ до замкнутого множества $S \subset \mathbb{R}^n$:

$$d(y, S, \|\cdot\|) = \inf\{\|x - y\| \mid x \in S\}$$

Мы будем фокусироваться на евклидовой проекции (возможны другие варианты) точки $y \in \mathbb{R}^n$ на множество $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - это точка $\text{proj}_S(y) \in S$:

$$\text{proj}_S(y) = \Pi_S(y) = \underset{x \in S}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|x - y\|_2^2$$

- **Достаточное условия существования проекции.** Если $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - замкнутое множество, то проекция на множество S существует для любой точки.



Проекция

Расстояние d от точки $y \in \mathbb{R}^n$ до замкнутого множества $S \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$d(y, S, \|\cdot\|) = \inf\{\|x - y\| \mid x \in S\}$$

Мы будем фокусироваться на евклидовой проекции (возможны другие варианты) точки $y \in \mathbb{R}^n$ на множество $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - это точка $\text{proj}_S(y) \in S$:

$$\text{proj}_S(y) = \Pi_S(y) = \underset{x \in S}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|x - y\|_2^2$$

- **Достаточное условия существования проекции.** Если $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - замкнутое множество, то проекция на множество S существует для любой точки.
- **Достаточное условия единственности проекции.** Если $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - замкнутое выпуклое множество, то проекция на множество S единственна для любой точки.

Проекция

Расстояние d от точки $y \in \mathbb{R}^n$ до замкнутого множества $S \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$d(y, S, \|\cdot\|) = \inf\{\|x - y\| \mid x \in S\}$$

Мы будем фокусироваться на евклидовой проекции (возможны другие варианты) точки $y \in \mathbb{R}^n$ на множество $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - это точка $\text{proj}_S(y) \in S$:

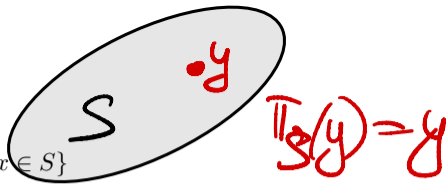
$$\text{proj}_S(y) = \Pi_S(y) = \underset{x \in S}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|x - y\|_2^2$$

- **Достаточное условия существования проекции.** Если $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - замкнутое множество, то проекция на множество S существует для любой точки.
- **Достаточное условия единственности проекции.** Если $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - замкнутое выпуклое множество, то проекция на множество S единственна для любой точки.
- Если множество открыто, и точка вне этого множества, то ее проекция на это множество может не существовать.

Проекция

Расстояние d от точки $y \in \mathbb{R}^n$ до замкнутого множества $S \subset \mathbb{R}^n$:

$$d(y, S, \|\cdot\|) = \inf\{\|x - y\| \mid x \in S\}$$



Мы будем фокусироваться на евклидовой проекции (возможны другие варианты) точки $y \in \mathbb{R}^n$ на множество $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - это точка $\text{proj}_S(y) \in S$:

$$\text{proj}_S(y) = \Pi_S(y) = \underset{x \in S}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|x - y\|_2^2$$

- **Достаточное условия существования проекции.** Если $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - замкнутое множество, то проекция на множество S существует для любой точки.
- **Достаточное условия единственности проекции.** Если $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - замкнутое выпуклое множество, то проекция на множество S единственна для любой точки.
- Если множество открыто, и точка вне этого множества, то ее проекция на это множество может не существовать.
- Если точка лежит внутри множества, то ее проекция - это сама точка.

Критерий проекции (неравенство Бурбаки-Чейни-Гольдштейна)

Theorem

самое
интересно $\rightarrow (y \notin S)$

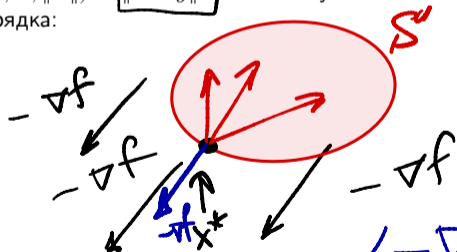
Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - замкнутое и выпуклое, $\forall x \in S, y \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\langle y - \text{proj}_S(y), x - \text{proj}_S(y) \rangle \leq 0 \quad (1)$$

$$\|x - \text{proj}_S(y)\|^2 + \|y - \text{proj}_S(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 \quad (2)$$

argmin

$\text{proj}_S(y)$ - минимизатор дифференцируемой выпуклой функции $d(y, S, \|\cdot\|) = \|x - y\|^2$ на S . По условию оптимальности первого порядка:



$$\langle -\nabla f(x^*), x - x^* \rangle \leq 0$$

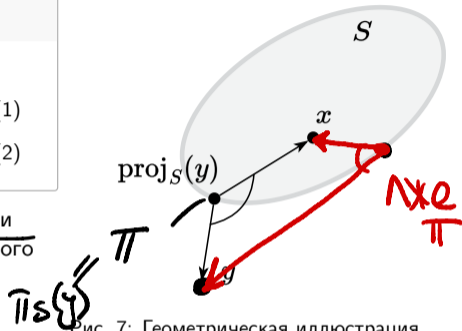


Рис. 7: Геометрическая иллюстрация первого утверждения. Для любой точки $x \in S$ угол между векторами $x - \text{proj}_S(y)$ и $y - \text{proj}_S(y)$ должен быть не острый

Критерий проекции (неравенство Бурбаки-Чейни-Гольдштейна)

i Theorem

Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - замкнутое и выпуклое, $\forall x \in S, y \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\langle y - \text{proj}_S(y), x - \text{proj}_S(y) \rangle \leq 0 \quad (1)$$

$$\|x - \text{proj}_S(y)\|^2 + \|y - \text{proj}_S(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 \quad (2)$$

1. $\text{proj}_S(y)$ - минимизатор дифференцируемой выпуклой функции $d(y, S, \|\cdot\|) = \|x - y\|^2$ на S . По условию оптимальности первого порядка:

$$\nabla d(\text{proj}_S(y))^T (x - \text{proj}_S(y)) \geq 0$$

$$\begin{aligned} \nabla_x d(\pi) &= \nabla_x (\|x - y\|_2^2) (\pi) = \\ &= 2(x - y) (\pi) = 2(\pi - y) \end{aligned}$$

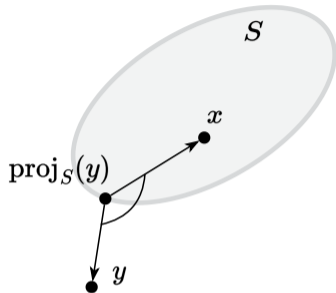


Рис. 7: Геометрическая иллюстрация первого утверждения. Для любой точки $x \in S$ угол между векторами $x - \text{proj}_S(y)$ и $y - \text{proj}_S(y)$ должен быть не острый

Критерий проекции (неравенство Бурбаки-Чейни-Гольдштейна)

i Theorem

Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - замкнутое и выпуклое, $\forall x \in S, y \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\langle y - \text{proj}_S(y), x - \text{proj}_S(y) \rangle \leq 0 \quad (1)$$

$$\|x - \text{proj}_S(y)\|^2 + \|y - \text{proj}_S(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 \quad (2)$$

1. $\text{proj}_S(y)$ - минимизатор дифференцируемой выпуклой функции $d(y, S, \|\cdot\|) = \|x - y\|^2$ на S . По условию оптимальности первого порядка:

$$\nabla d(\text{proj}_S(y))^T (x - \text{proj}_S(y)) \geq 0$$

$$2 (\text{proj}_S(y) - y)^T (x - \text{proj}_S(y)) \geq 0$$

$$2 (\pi - y)^T (x - \pi) \geq 0$$

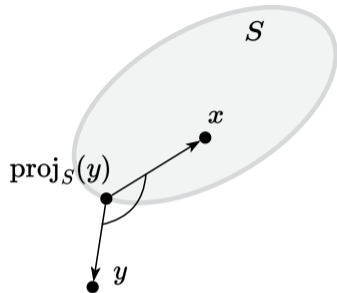
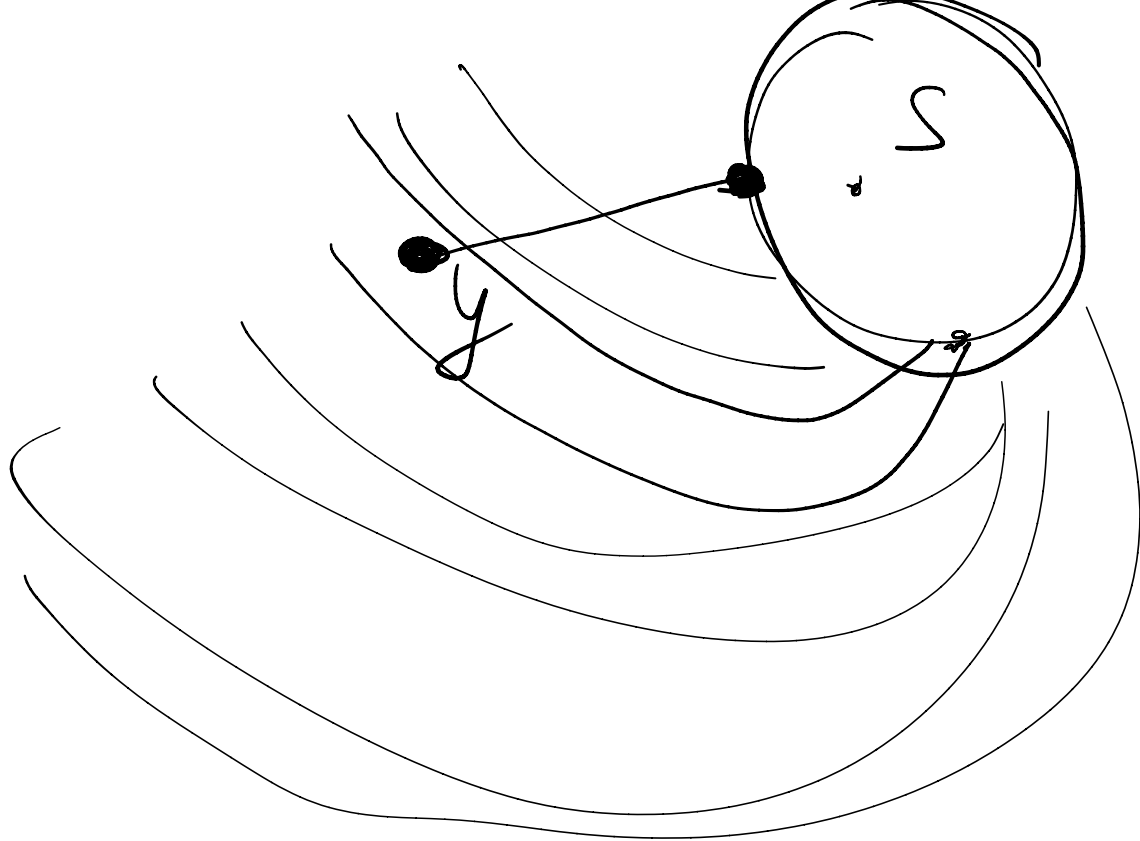
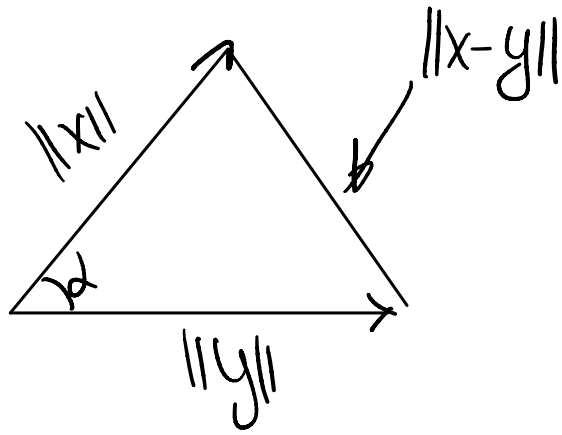


Рис. 7: Геометрическая иллюстрация первого утверждения. Для любой точки $x \in S$ угол между векторами $x - \text{proj}_S(y)$ и $y - \text{proj}_S(y)$ должен быть не острый





Критерий проекции (неравенство Бурбаки-Чейни-Гольдштейна)

i Theorem

Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - замкнутое и выпуклое, $\forall x \in S, y \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\langle y - \text{proj}_S(y), x - \text{proj}_S(y) \rangle \leq 0 \quad (1)$$

$$\|x - \text{proj}_S(y)\|^2 + \|y - \text{proj}_S(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 \quad (2)$$

1. $\text{proj}_S(y)$ - минимизатор дифференцируемой выпуклой функции $d(y, S, \|\cdot\|) = \|x - y\|^2$ на S . По условию оптимальности первого порядка:

$$\nabla d(\text{proj}_S(y))^T (x - \text{proj}_S(y)) \geq 0$$

$$\cancel{2} (\text{proj}_S(y) - y)^T (x - \text{proj}_S(y)) \geq 0$$

$$(y - \text{proj}_S(y))^T (x - \text{proj}_S(y)) \leq 0$$

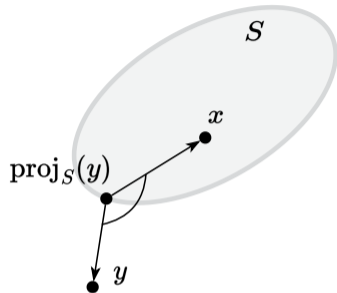


Рис. 7: Геометрическая иллюстрация первого утверждения. Для любой точки $x \in S$ угол между векторами $x - \text{proj}_S(y)$ и $y - \text{proj}_S(y)$ должен быть не острый

Критерий проекции (неравенство Бурбаки-Чейни-Гольдштейна)

i Theorem

Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - замкнутое и выпуклое, $\forall x \in S, y \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\langle y - \text{proj}_S(y), x - \text{proj}_S(y) \rangle \leq 0 \quad (1)$$

$$\|x - \text{proj}_S(y)\|^2 + \|y - \text{proj}_S(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 \quad (2)$$

1. $\text{proj}_S(y)$ - минимизатор дифференцируемой выпуклой функции $d(y, S, \|\cdot\|) = \|x - y\|^2$ на S . По условию оптимальности первого порядка:

$$\nabla d(\text{proj}_S(y))^T (x - \text{proj}_S(y)) \geq 0$$

$$2 (\text{proj}_S(y) - y)^T (x - \text{proj}_S(y)) \geq 0$$

$$(y - \text{proj}_S(y))^T (x - \text{proj}_S(y)) \leq 0$$

2. Используем правило косинусов $2x^T y = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2$ с $x = x - \text{proj}_S(y)$ и $y = y - \text{proj}_S(y)$. По первому свойству теоремы:

$$x^T y = \langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \alpha$$

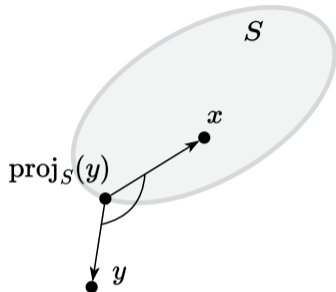


Рис. 7: Геометрическая иллюстрация первого утверждения. Для любой точки $x \in S$ угол между векторами $x - \text{proj}_S(y)$ и $y - \text{proj}_S(y)$ должен быть не острый

$$\cos \alpha = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2}{2 \|x\| \cdot \|y\|}$$

Критерий проекции (неравенство Бурбаки-Чейни-Гольдштейна)

i Theorem

Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - замкнутое и выпуклое, $\forall x \in S, y \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\langle y - \text{proj}_S(y), x - \text{proj}_S(y) \rangle \leq 0 \quad (1)$$

$$\|x - \text{proj}_S(y)\|^2 + \|y - \text{proj}_S(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 \quad (2)$$

1. $\text{proj}_S(y)$ - минимизатор дифференцируемой выпуклой функции $d(y, S, \|\cdot\|) = \|x - y\|^2$ на S . По условию оптимальности первого порядка:

$$\nabla d(\text{proj}_S(y))^T (x - \text{proj}_S(y)) \geq 0$$

$$2 (\text{proj}_S(y) - y)^T (x - \text{proj}_S(y)) \geq 0$$

$$(y - \text{proj}_S(y))^T (x - \text{proj}_S(y)) \leq 0$$

2. Используем правило косинусов $\underline{2x^T y} = \underline{\|x\|^2} + \|y\|^2 - \underline{\|x - y\|^2}$ с
 $x = x - \text{proj}_S(y)$ и $y = y - \text{proj}_S(y)$. По первому свойству теоремы:

$x - \pi$

$y - \pi$

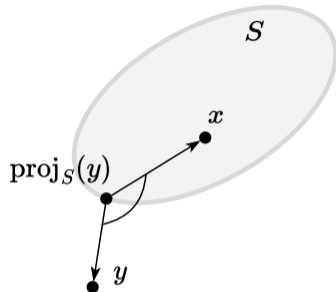


Рис. 7: Геометрическая иллюстрация первого утверждения. Для любой точки $x \in S$ угол между векторами $x - \text{proj}_S(y)$ и $y - \text{proj}_S(y)$ должен быть не острый

Критерий проекции (неравенство Бурбаки-Чейни-Гольдштейна)

i Theorem

Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - замкнутое и выпуклое, $\forall x \in S, y \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\langle y - \text{proj}_S(y), x - \text{proj}_S(y) \rangle \leq 0 \quad (1)$$

$$\|x - \text{proj}_S(y)\|^2 + \|y - \text{proj}_S(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 \quad (2)$$

1. $\text{proj}_S(y)$ - минимизатор дифференцируемой выпуклой функции $d(y, S, \|\cdot\|) = \|x - y\|^2$ на S . По условию оптимальности первого порядка:

$$\nabla d(\text{proj}_S(y))^T (x - \text{proj}_S(y)) \geq 0$$

$$2 (\text{proj}_S(y) - y)^T (x - \text{proj}_S(y)) \geq 0$$

$$(y - \text{proj}_S(y))^T (x - \text{proj}_S(y)) \leq 0$$

2. Используем правило косинусов $2x^T y = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2$ с $x = x - \text{proj}_S(y)$ и $y = y - \text{proj}_S(y)$. По первому свойству теоремы:

$$2(x - \pi)^T (y - \pi) = \|x - \pi\|_2^2 + \|y - \pi\|_2^2 - \|x - y\|_2^2$$

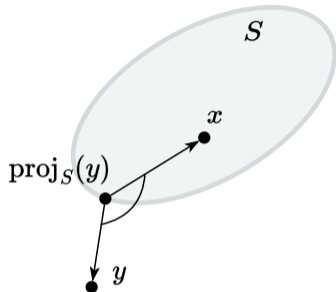


Рис. 7: Геометрическая иллюстрация первого утверждения. Для любой точки $x \in S$ угол между векторами $x - \text{proj}_S(y)$ и $y - \text{proj}_S(y)$ должен быть не острый

Критерий проекции (неравенство Бурбаки-Чейни-Гольдштейна)

i Theorem

Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - замкнутое и выпуклое, $\forall x \in S, y \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\langle y - \text{proj}_S(y), x - \text{proj}_S(y) \rangle \leq 0 \quad (1)$$

$$\|x - \text{proj}_S(y)\|^2 + \|y - \text{proj}_S(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 \quad (2)$$

1. $\text{proj}_S(y)$ - минимизатор дифференцируемой выпуклой функции $d(y, S, \|\cdot\|) = \|x - y\|^2$ на S . По условию оптимальности первого порядка:

$$\nabla d(\text{proj}_S(y))^T (x - \text{proj}_S(y)) \geq 0$$

$$2 (\text{proj}_S(y) - y)^T (x - \text{proj}_S(y)) \geq 0$$

$$(y - \text{proj}_S(y))^T (x - \text{proj}_S(y)) \leq 0$$

2. Используем правило косинусов $2x^T y = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2$ с $x = x - \text{proj}_S(y)$ и $y = y - \text{proj}_S(y)$. По первому свойству теоремы:

$$0 \geq 2x^T y = \|x - \text{proj}_S(y)\|^2 + \|y - \text{proj}_S(y)\|^2 - \|x - y\|^2$$

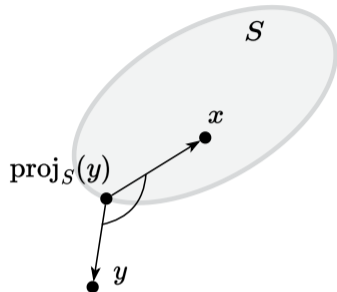


Рис. 7: Геометрическая иллюстрация первого утверждения. Для любой точки $x \in S$ угол между векторами $x - \text{proj}_S(y)$ и $y - \text{proj}_S(y)$ должен быть не острый

Критерий проекции (неравенство Бурбаки-Чейни-Гольдштейна)

i Theorem

Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - замкнутое и выпуклое, $\forall x \in S, y \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\langle y - \text{proj}_S(y), x - \text{proj}_S(y) \rangle \leq 0 \quad (1)$$

$$\|x - \text{proj}_S(y)\|^2 + \|y - \text{proj}_S(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 \quad (2)$$

1. $\text{proj}_S(y)$ - минимизатор дифференцируемой выпуклой функции $d(y, S, \|\cdot\|) = \|x - y\|^2$ на S . По условию оптимальности первого порядка:

$$\nabla d(\text{proj}_S(y))^T (x - \text{proj}_S(y)) \geq 0$$

$$2 (\text{proj}_S(y) - y)^T (x - \text{proj}_S(y)) \geq 0$$

$$(y - \text{proj}_S(y))^T (x - \text{proj}_S(y)) \leq 0$$

2. Используем правило косинусов $2x^T y = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2$ с $x = x - \text{proj}_S(y)$ и $y = y - \text{proj}_S(y)$. По первому свойству теоремы:

$$0 \geq 2x^T y = \|x - \text{proj}_S(y)\|^2 + \|y - \text{proj}_S(y)\|^2 - \|x - y\|^2$$

$$\|x - \text{proj}_S(y)\|^2 + \|y - \text{proj}_S(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2$$

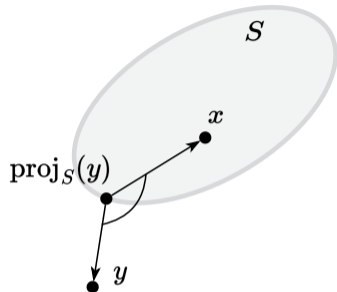


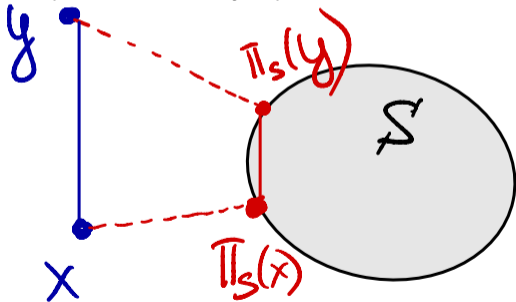
Рис. 7: Геометрическая иллюстрация первого утверждения. Для любой точки $x \in S$ угол между векторами $x - \text{proj}_S(y)$ и $y - \text{proj}_S(y)$ должен быть не острый

Оператор проекции является нестягивающим

- Функция f называется нестягивающей, если она L -Липшицева с $L \leq 1$ ¹. То есть, для любых двух точек $x, y \in \text{dom} f$,

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|, \text{ where } L \leq 1.$$

Это означает, что расстояние между образами точек не больше, чем расстояние между исходными точками.



¹Нестягивающая становится сжимающей, если $L < 1$.

Оператор проекции является нестягивающим

- Функция f называется нестягивающей, если она L -Липшицева с $L \leq 1$ ¹. То есть, для любых двух точек $x, y \in \text{dom} f$,

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|, \text{ where } L \leq 1.$$

Это означает, что расстояние между образами точек не больше, чем расстояние между исходными точками.

- Оператор проекции является нестягивающим:

$$\|\text{proj}(x) - \text{proj}(y)\|_2 \leq \|x - y\|_2.$$

¹Нестягивающая становится сжимающей, если $L < 1$.

Оператор проекции является нерастягивающим

Сокращенная запись: пусть $\pi = \text{proj}$ и $\pi(x)$ обозначает $\text{proj}(x)$.

Начнём с важного свойства проекции:

$$\langle y - \pi(y), x - \pi(y) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in S. \quad (3)$$

Оператор проекции является нестягивающим

Сокращенная запись: пусть $\pi = \text{proj}$ и $\pi(x)$ обозначает $\text{proj}(x)$.

Начнём с важного свойства проекции:

$$\langle y - \pi(y), x - \pi(y) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in S. \quad (3)$$

Заменяем x на $\pi(x)$ в (3)

$$\langle y - \pi(y), \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0. \quad (4)$$

Оператор проекции является нерастягивающим

Сокращенная запись: пусть $\pi = \text{proj}$ и $\pi(x)$ обозначает $\text{proj}(x)$.

Начнём с важного свойства проекции:

$$\langle y - \pi(y), x - \pi(y) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in S. \quad (3)$$

Заменим x на $\pi(x)$ в (3)

$$\langle y - \pi(y), \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0. \quad (4)$$

Заменим y на x и x на $\pi(y)$ в (3)

$$\langle x - \pi(x), \pi(y) - \pi(x) \rangle \leq 0. \quad (5)$$

Оператор проекции является нерастягивающим

Сокращенная запись: пусть $\pi = \text{proj}$ и $\pi(x)$ обозначает $\text{proj}(x)$.

Начнём с важного свойства проекции:

$$\langle y - \pi(y), x - \pi(y) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in S. \quad (3)$$

Заменим x на $\pi(x)$ в (3)

$$\langle y - \pi(y), \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0. \quad (4)$$

Заменим y на x и x на $\pi(y)$ в (3)

$$\langle x - \pi(x), \pi(y) - \pi(x) \rangle \leq 0. \quad (5)$$

(4)+(5) сократило $\pi(y) - \pi(x)$, что не хорошо. Поэтому перевернем знак в (5), что даст нам

$$\langle \pi(x) - x, \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0. \quad (6)$$

Оператор проекции является нерастягивающим

Сокращенная запись: пусть $\pi = \text{proj}$ и $\pi(x)$ обозначает $\text{proj}(x)$.

Начнём с важного свойства проекции:

$$\langle y - \pi(y), x - \pi(y) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in S. \quad (3)$$

Заменим x на $\pi(x)$ в (3)

$$\langle y - \pi(y), \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0. \quad (4)$$

Заменим y на x и x на $\pi(y)$ в (3)

$$\langle x - \pi(x), \pi(y) - \pi(x) \rangle \leq 0. \quad (5)$$

(4)+(5) сократило $\pi(y) - \pi(x)$, что не хорошо. Поэтому перевернем знак в (5), что даст нам

$$\langle \pi(x) - x, \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0. \quad (6)$$

$$\langle y - \pi(y) + \pi(x) - x, \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0$$

Оператор проекции является нерастягивающим

Сокращенная запись: пусть $\pi = \text{proj}$ и $\pi(x)$ обозначает $\text{proj}(x)$.

Начнём с важного свойства проекции:

$$\langle y - \pi(y), x - \pi(y) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in S. \quad (3)$$

Заменим x на $\pi(x)$ в (3)

$$\langle y - \pi(y), \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0. \quad (4)$$

Заменим y на x и x на $\pi(y)$ в (3)

$$\langle x - \pi(x), \pi(y) - \pi(x) \rangle \leq 0. \quad (5)$$

(4)+(5) сократило $\pi(y) - \pi(x)$, что не хорошо. Поэтому перевернем знак в (5), что даст нам

$$\langle \pi(x) - x, \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0. \quad (6)$$

$$\langle y - \pi(y) + \pi(x) - x, \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0$$

$$\langle y - x, \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq -\langle \pi(x) - \pi(y), \pi(x) - \pi(y) \rangle$$

Оператор проекции является нерастягивающим

Сокращенная запись: пусть $\pi = \text{proj}$ и $\pi(x)$ обозначает $\text{proj}(x)$.

Начнём с важного свойства проекции:

$$\langle y - \pi(y), x - \pi(y) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in S. \quad (3)$$

Заменим x на $\pi(x)$ в (3)

$$\langle y - \pi(y), \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0. \quad (4)$$

Заменим y на x и x на $\pi(y)$ в (3)

$$\langle x - \pi(x), \pi(y) - \pi(x) \rangle \leq 0. \quad (5)$$

(4)+(5) сократило $\pi(y) - \pi(x)$, что не хорошо. Поэтому перевернем знак в (5), что даст нам

$$\langle \pi(x) - x, \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0. \quad (6)$$

$$\langle y - \pi(y) + \pi(x) - x, \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0$$

$$\langle y - x, \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq -\langle \pi(x) - \pi(y), \pi(x) - \pi(y) \rangle$$

$$\langle y - x, \pi(y) - \pi(x) \rangle \geq \|\pi(x) - \pi(y)\|_2^2$$

Оператор проекции является нерастягивающим

Сокращенная запись: пусть $\pi = \text{proj}$ и $\pi(x)$ обозначает $\text{proj}(x)$.

Начнём с важного свойства проекции:

$$\langle y - \pi(y), x - \pi(y) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in S. \quad (3)$$

Заменим x на $\pi(x)$ в (3)

$$\langle y - \pi(y), \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0. \quad (4)$$

Заменим y на x и x на $\pi(y)$ в (3)

$$\langle x - \pi(x), \pi(y) - \pi(x) \rangle \leq 0. \quad (5)$$

(4)+(5) сократило $\pi(y) - \pi(x)$, что не хорошо. Поэтому перевернем знак в (5), что даст нам

$$\langle \pi(x) - x, \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0. \quad (6)$$

$$\langle y - \pi(y) + \pi(x) - x, \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0$$

$$\langle y - x, \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq -\langle \pi(x) - \pi(y), \pi(x) - \pi(y) \rangle$$

$$\langle y - x, \pi(y) - \pi(x) \rangle \geq \|\pi(x) - \pi(y)\|_2^2$$

$$\|(y - x)^\top (\pi(y) - \pi(x))\|_2 \geq \|\pi(x) - \pi(y)\|_2^2$$

Оператор проекции является нерастягивающим

Сокращенная запись: пусть $\pi = \text{proj}$ и $\pi(x)$ обозначает $\text{proj}(x)$.

Начнём с важного свойства проекции:

$$\langle y - \pi(y), x - \pi(y) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in S. \quad (3)$$

Заменим x на $\pi(x)$ в (3)

$$\langle y - \pi(y), \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0. \quad (4)$$

Заменим y на x и x на $\pi(y)$ в (3)

$$\langle x - \pi(x), \pi(y) - \pi(x) \rangle \leq 0. \quad (5)$$

(4)+(5) сократило $\pi(y) - \pi(x)$, что не хорошо. Поэтому перевернем знак в (5), что даст нам

$$\langle \pi(x) - x, \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0. \quad (6)$$

$$\langle y - \pi(y) + \pi(x) - x, \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0$$

$$\langle y - x, \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq -\langle \pi(x) - \pi(y), \pi(x) - \pi(y) \rangle$$

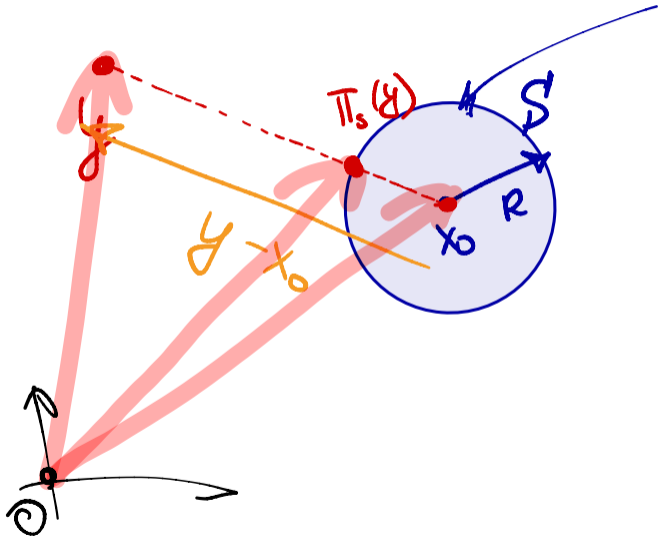
$$\langle y - x, \pi(y) - \pi(x) \rangle \geq \|\pi(x) - \pi(y)\|_2^2$$

$$\|(y - x)^\top (\pi(y) - \pi(x))\|_2 \geq \|\pi(x) - \pi(y)\|_2^2$$

По неравенству КБШ, левая часть ограничена сверху $\|y - x\|_2 \|\pi(y) - \pi(x)\|_2$, получаем $\|y - x\|_2 \|\pi(y) - \pi(x)\|_2 \geq \|\pi(x) - \pi(y)\|_2^2$. Деление на $\|\pi(x) - \pi(y)\|_2$ даёт требуемое неравенство.

Пример: проекция на шар

Найти $\pi_S(y)$, если $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq R\}$, $y \notin S$



$$\|x - x_0\| \leq R$$

$$\pi = x_0 + R \cdot \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}$$

Σ

Пример: проекция на шар

Найти $\pi_S(y) = \pi$, если $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq R\}$, $y \notin S$

Построим гипотезу из рисунка: $\pi = x_0 + R \cdot \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}$

Пример: проекция на шар

Найти $\pi_S(y) = \pi$, если $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq R\}$, $y \notin S$

Построим гипотезу из рисунка: $\pi = x_0 + R \cdot \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}$

Проверим неравенство для выпуклого замкнутого множества:

$$(\pi - y)^T (x - \pi) \geq 0$$

Пример: проекция на шар

Найти $\pi_S(y) = \pi$, если $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq R\}$, $y \notin S$

Построим гипотезу из рисунка: $\pi = x_0 + R \cdot \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}$

Проверим неравенство для выпуклого замкнутого множества:

$$(\pi - y)^T (x - \pi) \geq 0$$

$$\left(x_0 - y + R \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|} \right)^T \left(x - x_0 - R \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|} \right) =$$

Пример: проекция на шар

Найти $\pi_S(y) = \pi$, если $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq R\}$, $y \notin S$

Построим гипотезу из рисунка: $\pi = x_0 + R \cdot \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}$

Проверим неравенство для выпуклого замкнутого множества:

$$(\pi - y)^T (x - \pi) \geq 0$$

$$\begin{aligned} \left(x_0 - y + R \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|} \right)^T \left(x - x_0 - R \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|} \right) = \\ \left(\frac{(y - x_0)(R - \|y - x_0\|)}{\|y - x_0\|} \right)^T \left(\frac{(x - x_0)\|y - x_0\| - R(y - x_0)}{\|y - x_0\|} \right) = \end{aligned}$$

Пример: проекция на шар

Найти $\pi_S(y) = \pi$, если $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq R\}$, $y \notin S$

Построим гипотезу из рисунка: $\pi = x_0 + R \cdot \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}$

Проверим неравенство для выпуклого замкнутого множества:

$$(\pi - y)^T (x - \pi) \geq 0$$

$$\begin{aligned} \left(x_0 - y + R \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|} \right)^T \left(x - x_0 - R \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|} \right) &= \\ \left(\frac{(y - x_0)(R - \|y - x_0\|)}{\|y - x_0\|} \right)^T \left(\frac{(x - x_0)\|y - x_0\| - R(y - x_0)}{\|y - x_0\|} \right) &= \\ \frac{R - \|y - x_0\|}{\|y - x_0\|^2} (y - x_0)^T ((x - x_0)\|y - x_0\| - R(y - x_0)) &= \end{aligned}$$

Пример: проекция на шар

Найти $\pi_S(y) = \pi$, если $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq R\}$, $y \notin S$

Построим гипотезу из рисунка: $\pi = x_0 + R \cdot \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}$

Проверим неравенство для выпуклого замкнутого множества:

$$(\pi - y)^T (x - \pi) \geq 0$$

$$\begin{aligned} & \left(x_0 - y + R \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|} \right)^T \left(x - x_0 - R \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|} \right) = \\ & \left(\frac{(y - x_0)(R - \|y - x_0\|)}{\|y - x_0\|} \right)^T \left(\frac{(x - x_0)\|y - x_0\| - R(y - x_0)}{\|y - x_0\|} \right) = \\ & \frac{R - \|y - x_0\|}{\|y - x_0\|^2} (y - x_0)^T ((x - x_0)\|y - x_0\| - R(y - x_0)) = \\ & \frac{R - \|y - x_0\|}{\|y - x_0\|} \left((y - x_0)^T (x - x_0) - R\|y - x_0\| \right) = \end{aligned}$$

Пример: проекция на шар

Найти $\pi_S(y) = \pi$, если $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq R\}$, $y \notin S$

Построим гипотезу из рисунка: $\pi = x_0 + R \cdot \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}$

Проверим неравенство для выпуклого замкнутого множества:

$$(\pi - y)^T (x - \pi) \geq 0$$

$$\begin{aligned} & \left(x_0 - y + R \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|} \right)^T \left(x - x_0 - R \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|} \right) = \\ & \left(\frac{(y - x_0)(R - \|y - x_0\|)}{\|y - x_0\|} \right)^T \left(\frac{(x - x_0)\|y - x_0\| - R(y - x_0)}{\|y - x_0\|} \right) = \\ & \frac{R - \|y - x_0\|}{\|y - x_0\|^2} (y - x_0)^T ((x - x_0)\|y - x_0\| - R(y - x_0)) = \\ & \frac{R - \|y - x_0\|}{\|y - x_0\|} \left((y - x_0)^T (x - x_0) - R\|y - x_0\| \right) = \\ & (R - \|y - x_0\|) \left(\frac{(y - x_0)^T (x - x_0)}{\|y - x_0\|} - R \right) \end{aligned}$$

Пример: проекция на шар

Найти $\pi_S(y) = \pi$, если $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq R\}$, $y \notin S$

Построим гипотезу из рисунка: $\pi = x_0 + R \cdot \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}$

Проверим неравенство для выпуклого замкнутого множества:
 $(\pi - y)^T(x - \pi) \geq 0$

Первый множитель отрицателен для выбора точки y . Второй множитель тоже отрицателен, что следует из неравенства КБШ:

$$\begin{aligned} \left(x_0 - y + R \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}\right)^T \left(x - x_0 - R \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}\right) &= \\ \left(\frac{(y - x_0)(R - \|y - x_0\|)}{\|y - x_0\|}\right)^T \left(\frac{(x - x_0)\|y - x_0\| - R(y - x_0)}{\|y - x_0\|}\right) &= \\ \frac{R - \|y - x_0\|}{\|y - x_0\|^2} (y - x_0)^T ((x - x_0)\|y - x_0\| - R(y - x_0)) &= \\ \frac{R - \|y - x_0\|}{\|y - x_0\|} \left((y - x_0)^T (x - x_0) - R\|y - x_0\|\right) &= \\ (R - \|y - x_0\|) \left(\frac{(y - x_0)^T (x - x_0)}{\|y - x_0\|} - R\right) \end{aligned}$$

Пример: проекция на шар

Найти $\pi_S(y) = \pi$, если $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq R\}$, $y \notin S$

Построим гипотезу из рисунка: $\pi = x_0 + R \cdot \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}$

Проверим неравенство для выпуклого замкнутого множества:
 $(\pi - y)^T(x - \pi) \geq 0$

$$\begin{aligned} \left(x_0 - y + R \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}\right)^T \left(x - x_0 - R \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}\right) &= \\ \left(\frac{(y - x_0)(R - \|y - x_0\|)}{\|y - x_0\|}\right)^T \left(\frac{(x - x_0)\|y - x_0\| - R(y - x_0)}{\|y - x_0\|}\right) &= \\ \frac{R - \|y - x_0\|}{\|y - x_0\|^2} (y - x_0)^T ((x - x_0)\|y - x_0\| - R(y - x_0)) &= \\ \frac{R - \|y - x_0\|}{\|y - x_0\|} \left((y - x_0)^T (x - x_0) - R\|y - x_0\|\right) &= \\ (R - \|y - x_0\|) \left(\frac{(y - x_0)^T (x - x_0)}{\|y - x_0\|} - R\right) \end{aligned}$$

Первый множитель отрицателен для выбора точки y . Второй множитель тоже отрицателен, что следует из неравенства КБШ:

$$(y - x_0)^T(x - x_0) \leq \|y - x_0\|\|x - x_0\|$$

Пример: проекция на шар

Найти $\pi_S(y) = \pi$, если $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq R\}$, $y \notin S$

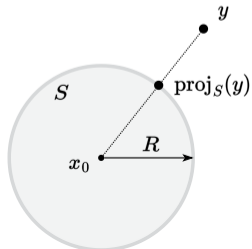
Построим гипотезу из рисунка: $\pi = x_0 + R \cdot \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}$

Проверим неравенство для выпуклого замкнутого множества:
 $(\pi - y)^T(x - \pi) \geq 0$

$$\begin{aligned} \left(x_0 - y + R \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|} \right)^T \left(x - x_0 - R \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|} \right) &= \\ \left(\frac{(y - x_0)(R - \|y - x_0\|)}{\|y - x_0\|} \right)^T \left(\frac{(x - x_0)\|y - x_0\| - R(y - x_0)}{\|y - x_0\|} \right) &= \\ \frac{R - \|y - x_0\|}{\|y - x_0\|^2} (y - x_0)^T ((x - x_0)\|y - x_0\| - R(y - x_0)) &= \\ \frac{R - \|y - x_0\|}{\|y - x_0\|} \left((y - x_0)^T (x - x_0) - R\|y - x_0\| \right) &= \\ (R - \|y - x_0\|) \left(\frac{(y - x_0)^T (x - x_0)}{\|y - x_0\|} - R \right) \end{aligned}$$

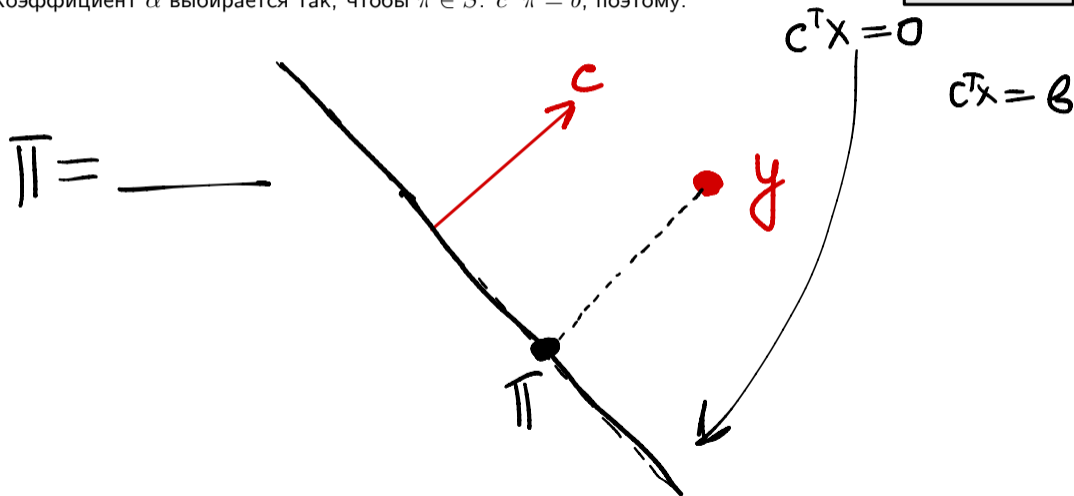
Первый множитель отрицателен для выбора точки y . Второй множитель тоже отрицателен, что следует из неравенства КБШ:

$$\begin{aligned} (y - x_0)^T(x - x_0) &\leq \|y - x_0\|\|x - x_0\| \\ \frac{(y - x_0)^T(x - x_0)}{\|y - x_0\|} - R &\leq \frac{\|y - x_0\|\|x - x_0\|}{\|y - x_0\|} - R \end{aligned}$$



Пример: проекция на гиперплоскость

Найти $\pi_S(y) = \pi$, если $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = b\}$, $y \notin S$. Построим гипотезу из рисунка: $\pi = y + \alpha c$.
Коэффициент α выбирается так, чтобы $\pi \in S$: $c^T \pi = b$, поэтому:



Пример: проекция на гиперплоскость

Найти $\pi_S(y) = \pi$, если $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = b\}$, $y \notin S$. Построим гипотезу из рисунка: $\pi = y + \alpha c$. Коэффициент α выбирается так, чтобы $\pi \in S$: $c^T \pi = b$, поэтому:

$$c^T \cdot \pi = b$$

$$c^T (y + \alpha \cdot c) = b$$

$$\underline{c^T y} + \underline{\alpha c^T c} = \underline{b}$$

$$\alpha c^T c = b - c^T y \rightarrow$$

$$\pi = y + \frac{b - c^T y}{c^T c} c$$

$$\alpha = \frac{b - c^T y}{c^T c}$$

Пример: проекция на гиперплоскость

Найти $\pi_S(y) = \pi$, если $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = b\}$, $y \notin S$. Построим гипотезу из рисунка: $\pi = y + \alpha c$. Коэффициент α выбирается так, чтобы $\pi \in S$: $c^T \pi = b$, поэтому:

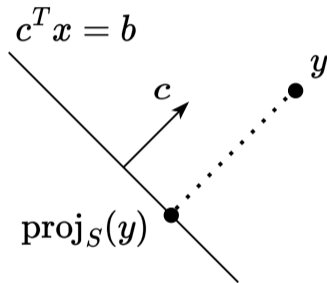


Рис. 9: Гиперплоскость

Пример: проекция на гиперплоскость

Найти $\pi_S(y) = \pi$, если $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = b\}$, $y \notin S$. Построим гипотезу из рисунка: $\pi = y + \alpha c$. Коэффициент α выбирается так, чтобы $\pi \in S$: $c^T \pi = b$, поэтому:

$$c^T(y + \alpha c) = b$$

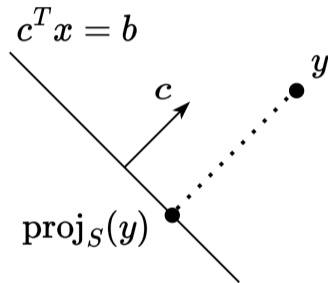
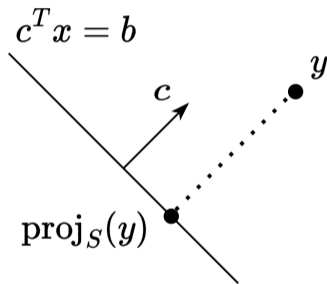


Рис. 9: Гиперплоскость

Пример: проекция на гиперплоскость

Найти $\pi_S(y) = \pi$, если $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = b\}$, $y \notin S$. Построим гипотезу из рисунка: $\pi = y + \alpha c$. Коэффициент α выбирается так, чтобы $\pi \in S$: $c^T \pi = b$, поэтому:

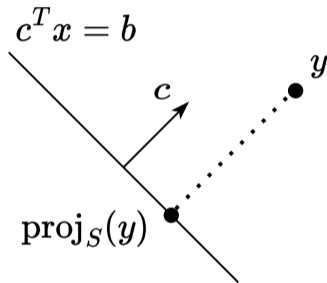


$$\begin{aligned} c^T(y + \alpha c) &= b \\ c^T y + \alpha c^T c &= b \end{aligned}$$

Рис. 9: Гиперплоскость

Пример: проекция на гиперплоскость

Найти $\pi_S(y) = \pi$, если $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = b\}$, $y \notin S$. Построим гипотезу из рисунка: $\pi = y + \alpha c$. Коэффициент α выбирается так, чтобы $\pi \in S$: $c^T \pi = b$, поэтому:

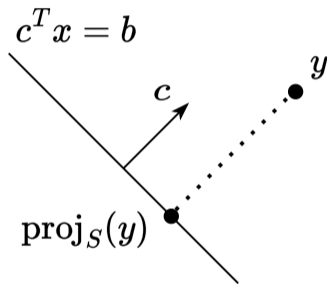


$$\begin{aligned}c^T(y + \alpha c) &= b \\c^T y + \alpha c^T c &= b \\c^T y &= b - \alpha c^T c\end{aligned}$$

Рис. 9: Гиперплоскость

Пример: проекция на гиперплоскость

Найти $\pi_S(y) = \pi$, если $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = b\}$, $y \notin S$. Построим гипотезу из рисунка: $\pi = y + \alpha c$. Коэффициент α выбирается так, чтобы $\pi \in S$: $c^T \pi = b$, поэтому:



$$c^T(y + \alpha c) = b$$

$$c^T y + \alpha c^T c = b$$

$$c^T y = b - \alpha c^T c$$

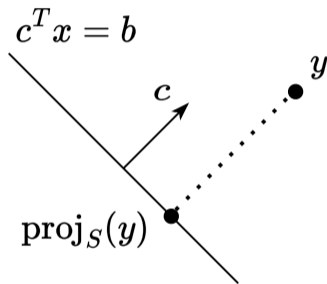
Проверим неравенство для выпуклого замкнутого множества: $(\pi - y)^T(x - \pi) \geq 0$

$$(y + \alpha c - y)^T(x - y - \alpha c) =$$

Рис. 9: Гиперплоскость

Пример: проекция на гиперплоскость

Найти $\pi_S(y) = \pi$, если $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = b\}$, $y \notin S$. Построим гипотезу из рисунка: $\pi = y + \alpha c$. Коэффициент α выбирается так, чтобы $\pi \in S$: $c^T \pi = b$, поэтому:



$$c^T(y + \alpha c) = b$$

$$c^T y + \alpha c^T c = b$$

$$c^T y = b - \alpha c^T c$$

Проверим неравенство для выпуклого замкнутого множества: $(\pi - y)^T(x - \pi) \geq 0$

$$(y + \alpha c - y)^T(x - y - \alpha c) =$$

$$\alpha c^T(x - y - \alpha c) =$$

Рис. 9: Гиперплоскость

Пример: проекция на гиперплоскость

Найти $\pi_S(y) = \pi$, если $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = b\}$, $y \notin S$. Построим гипотезу из рисунка: $\pi = y + \alpha c$. Коэффициент α выбирается так, чтобы $\pi \in S$: $c^T \pi = b$, поэтому:

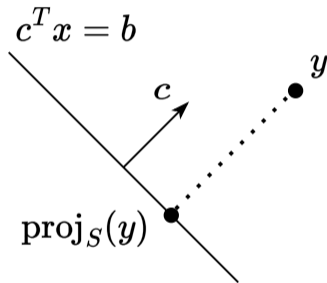


Рис. 9: Гиперплоскость

$$c^T(y + \alpha c) = b$$

$$c^T y + \alpha c^T c = b$$

$$c^T y = b - \alpha c^T c$$

Проверим неравенство для выпуклого замкнутого множества: $(\pi - y)^T(x - \pi) \geq 0$

$$(y + \alpha c - y)^T(x - y - \alpha c) =$$

$$\alpha c^T(x - y - \alpha c) =$$

$$\alpha(c^T x) - \alpha(c^T y) - \alpha^2(c^T c) =$$

Пример: проекция на гиперплоскость

Найти $\pi_S(y) = \pi$, если $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = b\}$, $y \notin S$. Построим гипотезу из рисунка: $\pi = y + \alpha c$. Коэффициент α выбирается так, чтобы $\pi \in S$: $c^T \pi = b$, поэтому:

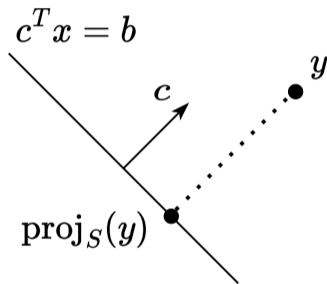


Рис. 9: Гиперплоскость

$$c^T(y + \alpha c) = b$$

$$c^T y + \alpha c^T c = b$$

$$c^T y = b - \alpha c^T c$$

Проверим неравенство для выпуклого замкнутого множества: $(\pi - y)^T(x - \pi) \geq 0$

$$(y + \alpha c - y)^T(x - y - \alpha c) =$$

$$\alpha c^T(x - y - \alpha c) =$$

$$\alpha(c^T x) - \alpha(c^T y) - \alpha^2(c^T c) =$$

$$\alpha b - \alpha(b - \alpha c^T c) - \alpha^2 c^T c =$$

Пример: проекция на гиперплоскость

Найти $\pi_S(y) = \pi$, если $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = b\}$, $y \notin S$. Построим гипотезу из рисунка: $\pi = y + \alpha c$. Коэффициент α выбирается так, чтобы $\pi \in S$: $c^T \pi = b$, поэтому:

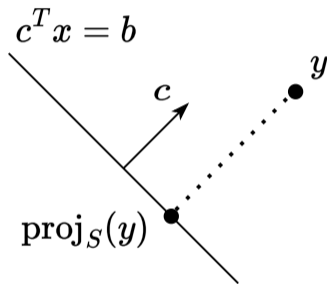


Рис. 9: Гиперплоскость

$$c^T(y + \alpha c) = b$$

$$c^T y + \alpha c^T c = b$$

$$c^T y = b - \alpha c^T c$$

Проверим неравенство для выпуклого замкнутого множества: $(\pi - y)^T(x - \pi) \geq 0$

$$(y + \alpha c - y)^T(x - y - \alpha c) =$$

$$\alpha c^T(x - y - \alpha c) =$$

$$\alpha(c^T x) - \alpha(c^T y) - \alpha^2(c^T c) =$$

$$\alpha b - \alpha(b - \alpha c^T c) - \alpha^2 c^T c =$$

$$\alpha b - \alpha b + \alpha^2 c^T c - \alpha^2 c^T c = 0 \geq 0$$

Метод проекции градиента (PGD)

$$x_{k+1} = \text{proj}_S(x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} y_k &= x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \\ x_{k+1} &= \text{proj}_S(y_k) \end{aligned}$$

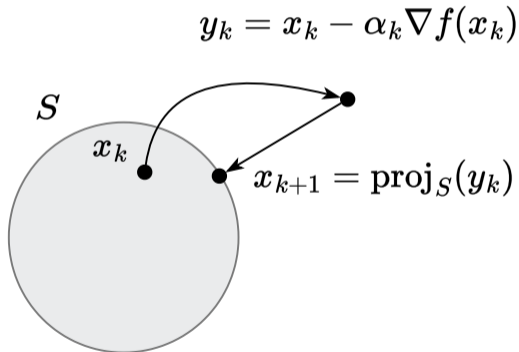


Рис. 10: Иллюстрация алгоритма метода проекции градиента

Скорость сходимости для гладких выпуклых функций

i Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ выпуклая и дифференцируемая. Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ замкнутое выпуклое множество, и пусть есть минимизатор x^* функции f на S ; кроме того, пусть f гладкая на S с параметром L . Алгоритм проекции градиента с шагом $\frac{1}{L}$ достигает следующей сходимости после итерации $k > 0$:

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{L\|x_0 - x^*\|_2^2}{2k}$$

В точности GD

Скорость сходимости для гладких сильно выпуклых функций

i Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является μ -сильно выпуклой. Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ замкнутое выпуклое множество, и пусть есть минимизатор x^* функции f на S ; кроме того, пусть f гладкая на S с параметром L . Алгоритм проекции градиента с шагом $\alpha \leq \frac{1}{L}$ достигает следующей сходимости после $k > 0$:

$$\|x_k - x^*\|_2^2 \leq (1 - \alpha\mu)^k \|x_0 - x^*\|_2^2$$

$$\alpha = \frac{1}{L}$$

Результаты сходимости метода проекции градиента для гладких функций

Метод проекции градиента: $\min_{x \in S} f(x)$ $x_{k+1} = \Pi_S(x_k - \alpha_k \nabla f(x_k))$ $\lambda(\nabla^2 f(x)) \in [\mu, L], \kappa = \frac{L}{\mu}$

гладкая & выпуклая

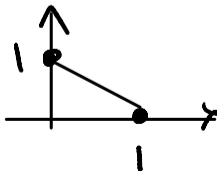
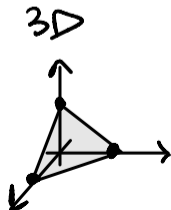
$$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$$
$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

гладкая & сильно выпуклая

$$\|x_k - x^*\|^2 = \mathcal{O}\left(\left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k\right)$$
$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\kappa \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

пример:

проекция на симплекс



$$1^T x = 1$$
$$x \geq 0$$

Результаты сходимости метода проекции градиента для гладких функций

Метод проекции градиента: $\min_{x \in S} f(x)$ $x_{k+1} = \Pi_S(x_k - \alpha_k \nabla f(x_k))$ $\lambda(\nabla^2 f(x)) \in [\mu, L], \kappa = \frac{L}{\mu}$

гладкая & выпуклая

$$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$$
$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

гладкая & сильно выпуклая

$$\|x_k - x^*\|^2 = \mathcal{O}\left(\left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k\right)$$
$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\kappa \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

- Обратите внимание, что характер сходимости метода по итерациям в точности совпадает с безусловным случаем (градиентным спуском).

Результаты сходимости метода проекции градиента для гладких функций

Метод проекции градиента: $\min_{x \in S} f(x)$ $x_{k+1} = \Pi_S(x_k - \alpha_k \nabla f(x_k))$ $\lambda(\nabla^2 f(x)) \in [\mu, L], \kappa = \frac{L}{\mu}$

гладкая & выпуклая

$$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$$
$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

гладкая & сильно выпуклая

$$\|x_k - x^*\|^2 = \mathcal{O}\left(\left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k\right)$$
$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\kappa \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

- Обратите внимание, что характер сходимости метода по итерациям в точности совпадает с безусловным случаем (градиентным спуском).
- Однако, стоимость итерации может быть **сильно** больше. Иногда, стоимость одной итерации может по порядку совпадать со стоимостью решения всей задачи.

Метод Франк-Вульфа

Франк - Вульф



Рис. 11: Маргарет Штраус Франк (1927-2024)

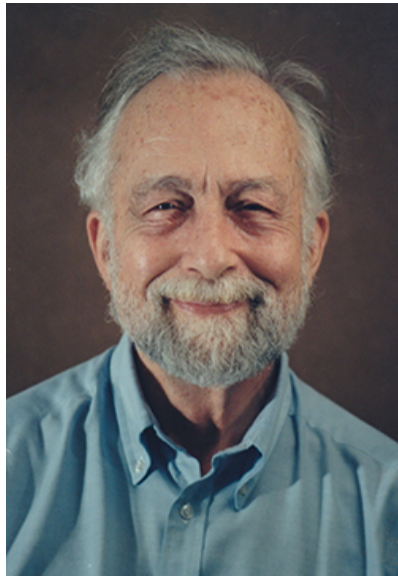


Рис. 12: Филипп Вульф (1927-2016)

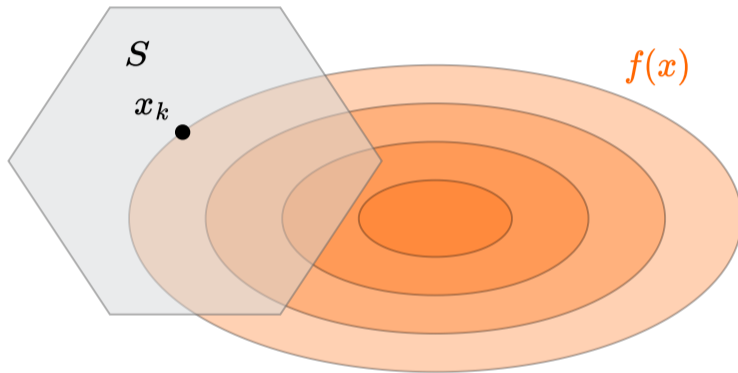


Рис. 13: Иллюстрация метода Франк-Вульфа (метод условного градиента)

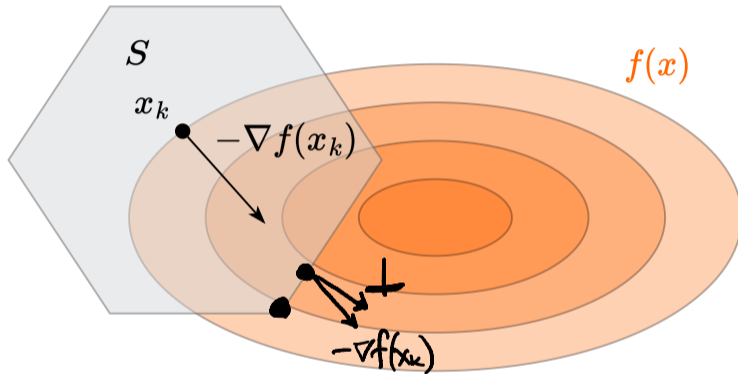


Рис. 14: Иллюстрация метода Франк-Вульфа (метод условного градиента)

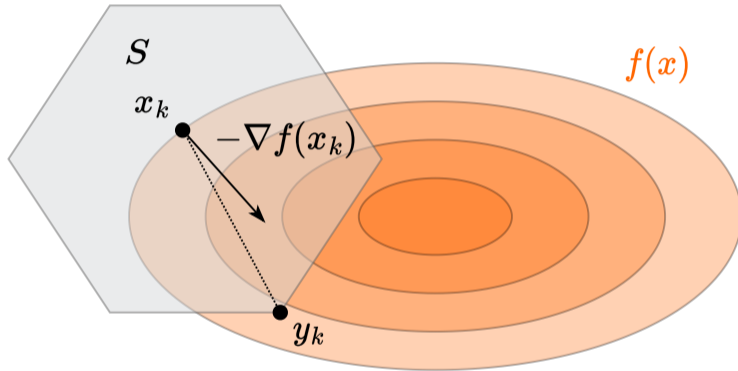


Рис. 15: Иллюстрация метода Франк-Вульфа (метод условного градиента)

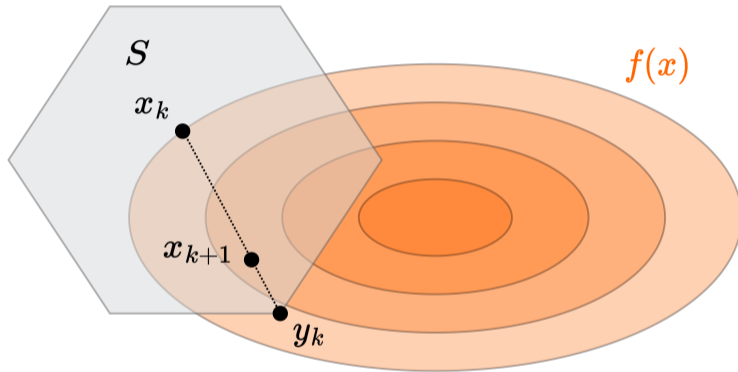


Рис. 16: Иллюстрация метода Франк-Вульфа (метод условного градиента)

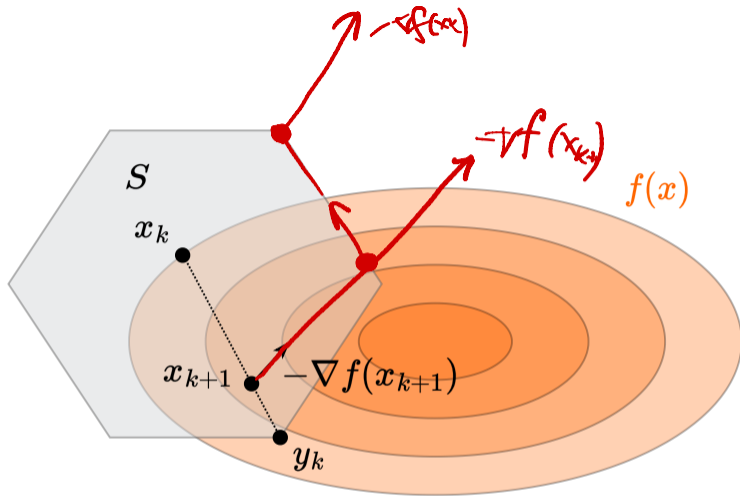


Рис. 17: Иллюстрация метода Франк-Вульфа (метод условного градиента)

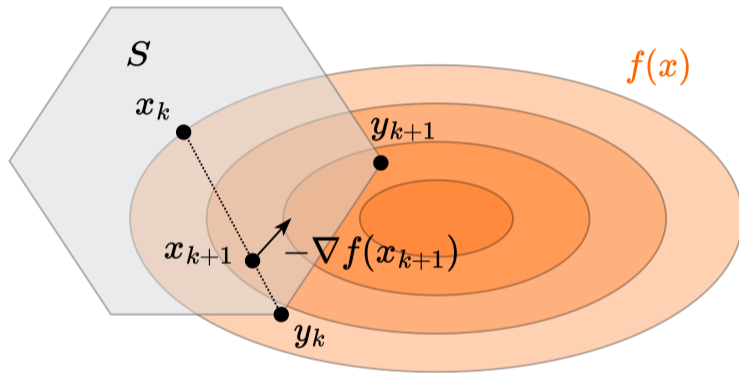


Рис. 18: Иллюстрация метода Франк-Вульфа (метод условного градиента)

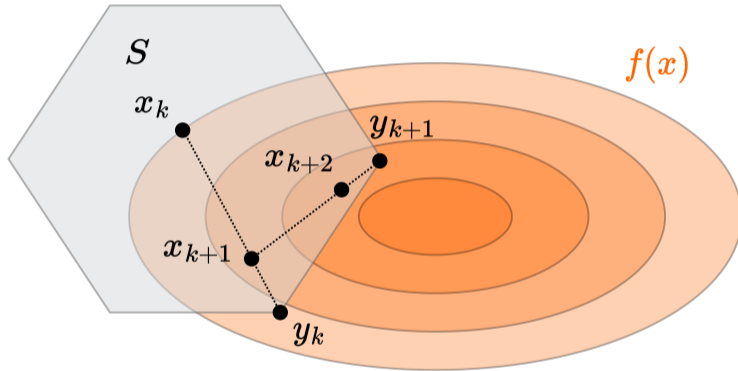


Рис. 19: Иллюстрация метода Франк-Вульфа (метод условного градиента)

Идея

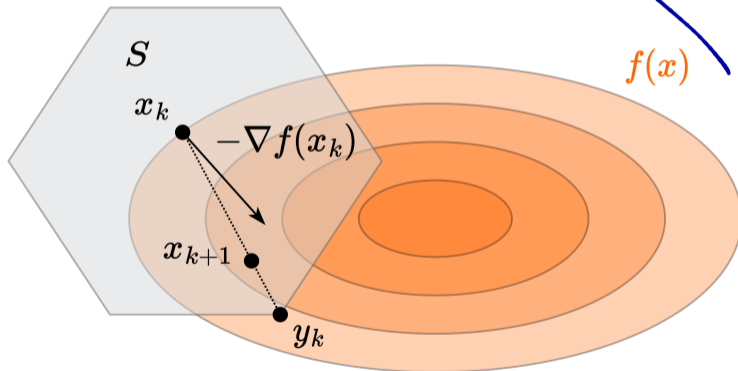
$$\min_{x \in S} f(x)$$

$$f^I_{x_k}(x) = \cancel{f(x_k)} + \langle \nabla f(x_k), x - \cancel{x_k} \rangle =$$

$$y_k = \arg \min_{x \in S} f^I_{x_k}(x) = \arg \min_{x \in S} \langle \nabla f(x_k), x \rangle$$

$$x_{k+1} = \gamma_k x_k + (1 - \gamma_k) y_k$$

$$= \underline{f(x_k)} + \langle \nabla f(x_k), x \rangle - \underline{\langle \nabla f(x_k), x_k \rangle}$$



$f(x)$

LMO

Linear
minimiz.
oracle

Рис. 20: Иллюстрация метода Франк-Вульфа (метод условного градиента)

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является выпуклой и дифференцируемой. Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ замкнутое выпуклое множество, и пусть существует минимизатор x^* функции f на S ; кроме того, пусть f гладкая на S с параметром L . Метод Франк-Вульфа с шагом $\gamma_k = \frac{k-1}{k+1}$ достигает следующей сходимости после $k > 0$ итераций:

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{2LR^2}{k+1}$$

где $R = \max_{x,y \in S} \|x - y\|$ является диаметром множества S .


Нижняя граница для метода Франк-Вульфа²

Theorem

Рассмотрим любой алгоритм, который ~~использует~~ только линейный минимизатор (LMO). Пусть диаметр множества S равен R . Существует L -гладкая сильно выпуклая функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что этот алгоритм требует по крайней мере

$$\min \left(\frac{n}{2}, \frac{LR^2}{16\varepsilon} \right)$$

итераций (т.е. вызовов LMO) для построения точки $\hat{x} \in S$ с $f(\hat{x}) - \min_{x \in S} f(x) \leq \varepsilon$. Нижняя граница применима как для выпуклых, так и для сильно выпуклых функций.

²  The Complexity of Large-scale Convex Programming under a Linear Optimization Oracle

Summary по методу Франк-Вульфа

- Метод не требует проекций, в некоторых специальных случаях позволяет вычислять итерации в замкнутой форме


Summary по методу Франк-Вульфа

- Метод не требует проекций, в некоторых специальных случаях позволяет вычислять итерации в замкнутой форме
- Глобальная скорость сходимости равна $O\left(\frac{1}{k}\right)$ для гладких и выпуклых функций. Сильная выпуклость не улучшает скорость - это нижняя граница для LMO



Summary по методу Франк-Вульфа

- Метод не требует проекций, в некоторых специальных случаях позволяет вычислять итерации в замкнутой форме
- Глобальная скорость сходимости равна $O\left(\frac{1}{k}\right)$ для гладких и выпуклых функций. Сильная выпуклость не улучшает скорость - это нижняя граница для LMO
- В сравнении с методом проекции градиента, скорость хуже, но итерация может быть дешевле и более разреженной

Summary по методу Франк-Вульфа

- Метод не требует проекций, в некоторых специальных случаях позволяет вычислять итерации в замкнутой форме
- Глобальная скорость сходимости равна $O\left(\frac{1}{k}\right)$ для гладких и выпуклых функций. Сильная выпуклость не улучшает скорость - это нижняя граница для LMO
- В сравнении с методом проекции градиента, скорость хуже, но итерация может быть дешевле и более разреженной
- Недавно было показано, что для сильно выпуклых множеств, скорость может быть улучшена до $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ ( paper)

Summary по методу Франк-Вульфа

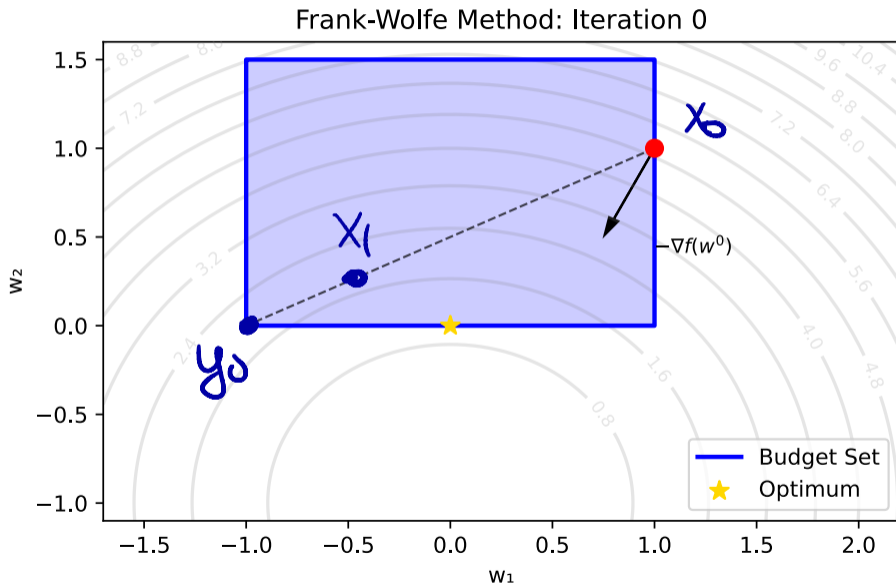
- Метод не требует проекций, в некоторых специальных случаях позволяет вычислять итерации в замкнутой форме
- Глобальная скорость сходимости равна $O\left(\frac{1}{k}\right)$ для гладких и выпуклых функций. Сильная выпуклость не улучшает скорость - это нижняя граница для LMO
- В сравнении с методом проекции градиента, скорость хуже, но итерация может быть дешевле и более разреженной
- Недавно было показано, что для сильно выпуклых множеств, скорость может быть улучшена до $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ ( paper)
- Если мы позволяем steps away, сходимость становится линейной ( paper) в сильно выпуклом случае

Summary по методу Франк-Вульфа

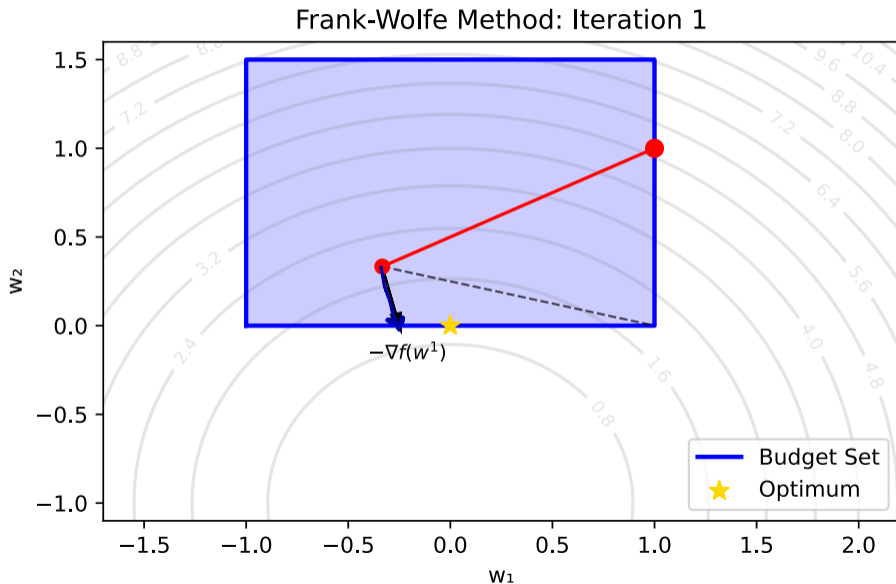
- Метод не требует проекций, в некоторых специальных случаях позволяет вычислять итерации в замкнутой форме
- Глобальная скорость сходимости равна $O\left(\frac{1}{k}\right)$ для гладких и выпуклых функций. Сильная выпуклость не улучшает скорость - это нижняя граница для LMO
- В сравнении с методом проекции градиента, скорость хуже, но итерация может быть дешевле и более разреженной
- Недавно было показано, что для сильно выпуклых множеств, скорость может быть улучшена до $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ (A paper)
- Если мы позволяем steps away, сходимость становится линейной (A paper) в сильно выпуклом случае
- Недавняя работа показала расширение на негладкий случай (A paper) с скоростью сходимости $O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$

Численные эксперименты

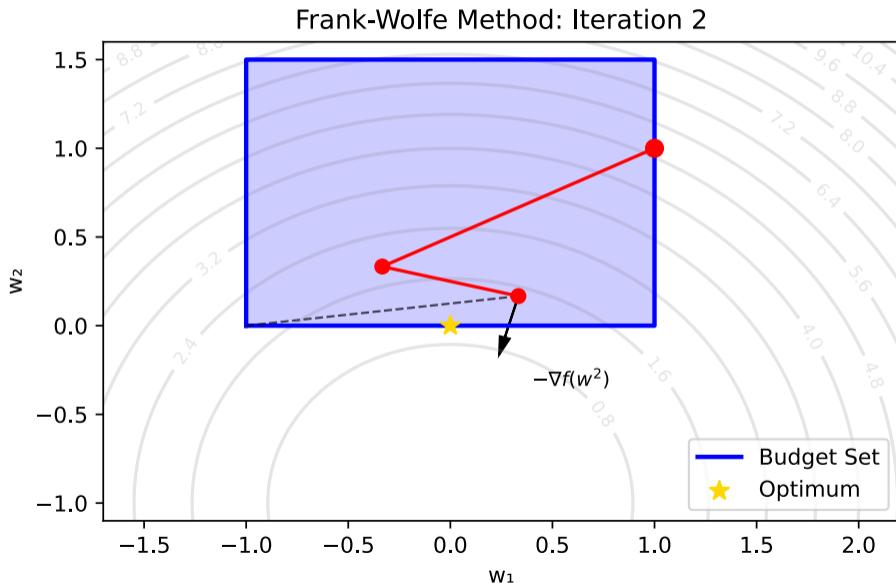
2d пример. Метод Франк-Вульфа



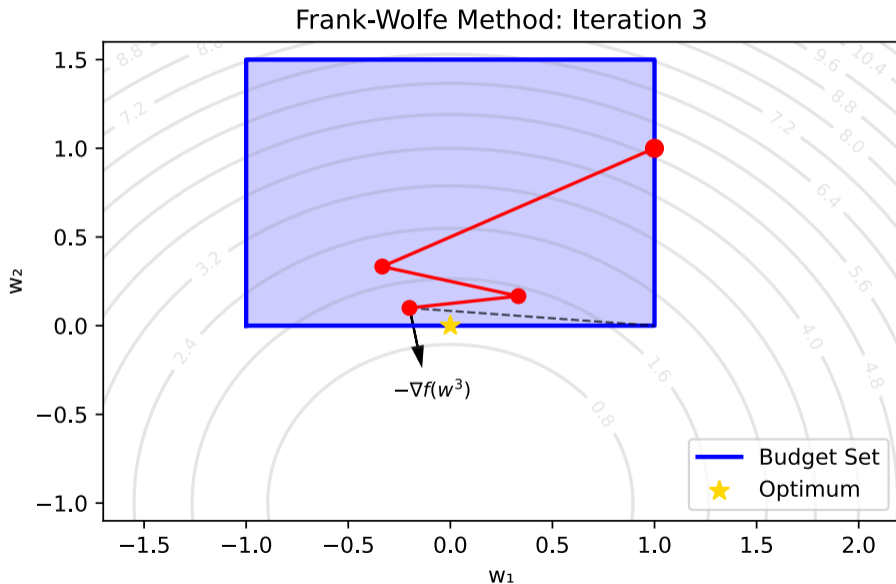
2d пример. Метод Франк-Вульфа



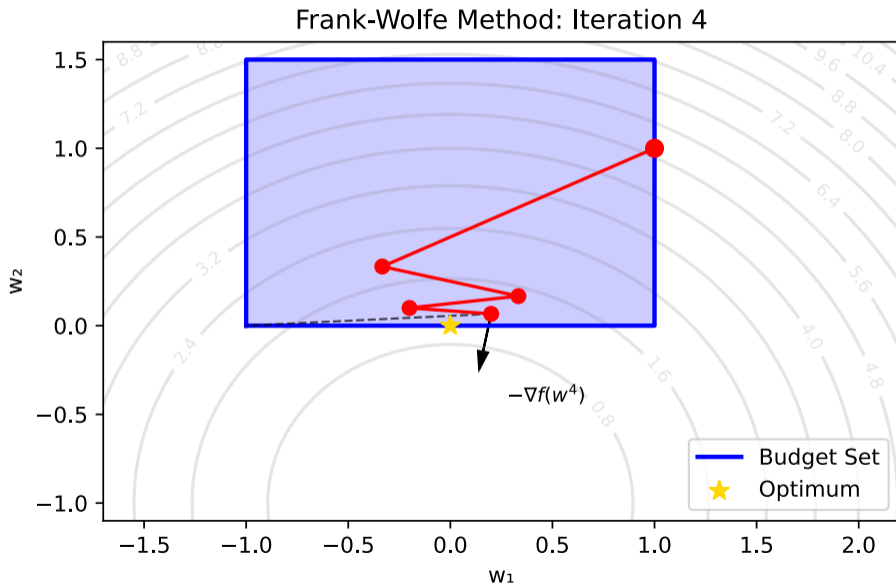
2d пример. Метод Франк-Вульфа



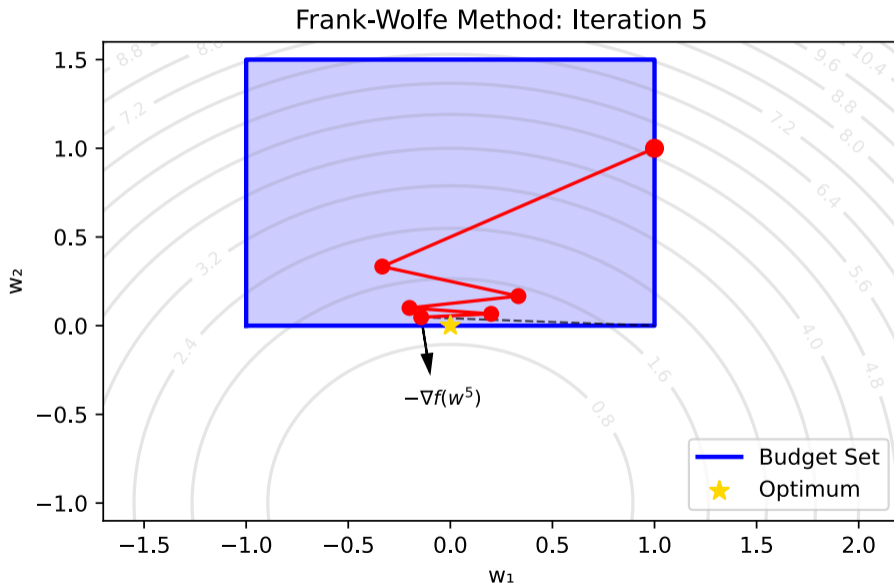
2d пример. Метод Франк-Вульфа



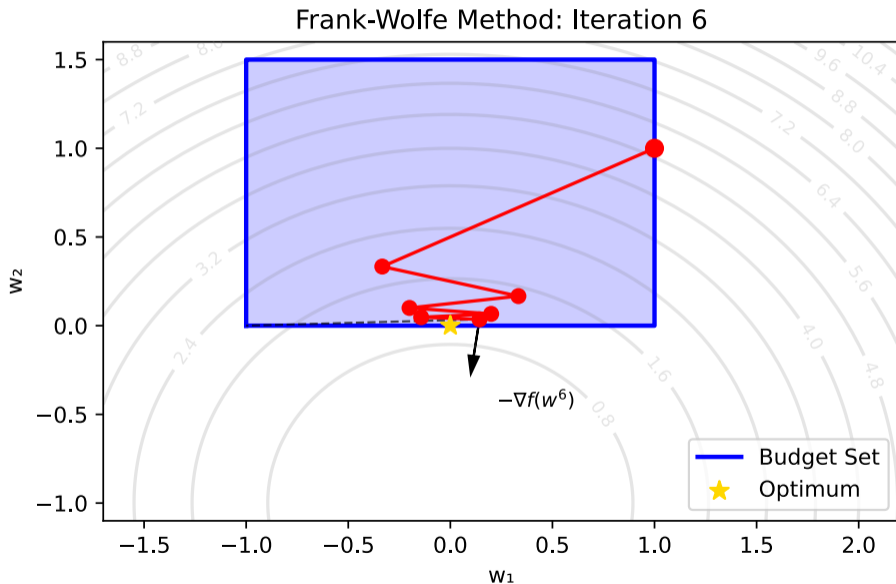
2d пример. Метод Франк-Вульфа



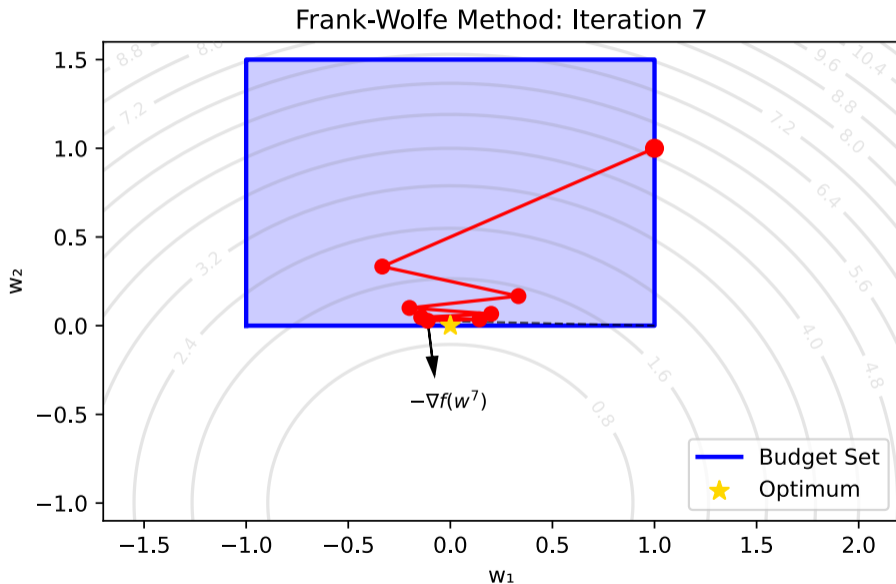
2d пример. Метод Франк-Вульфа



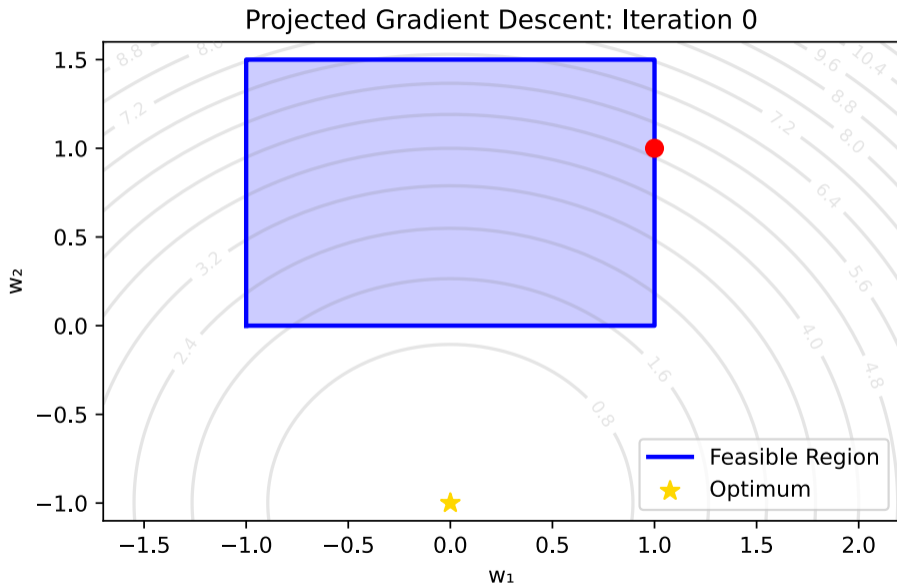
2d пример. Метод Франк-Вульфа



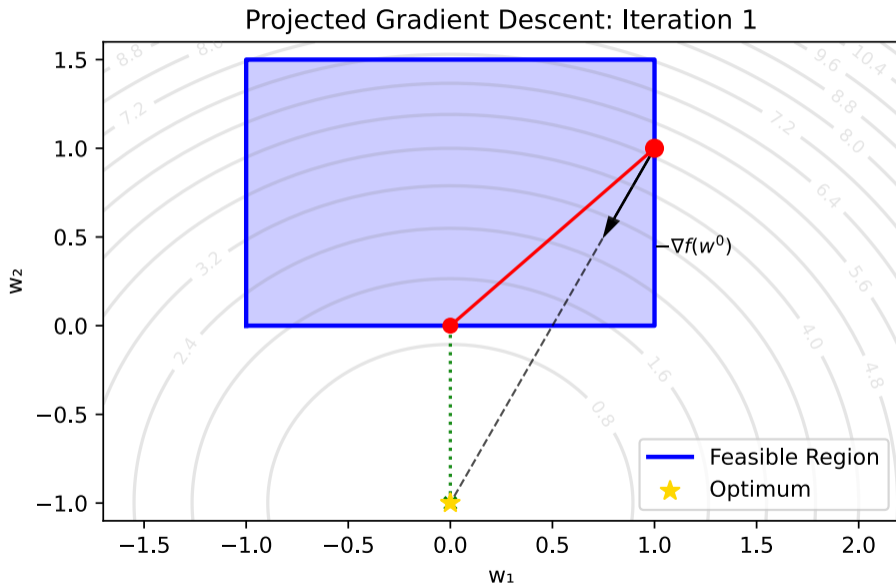
2d пример. Метод Франк-Вульфа



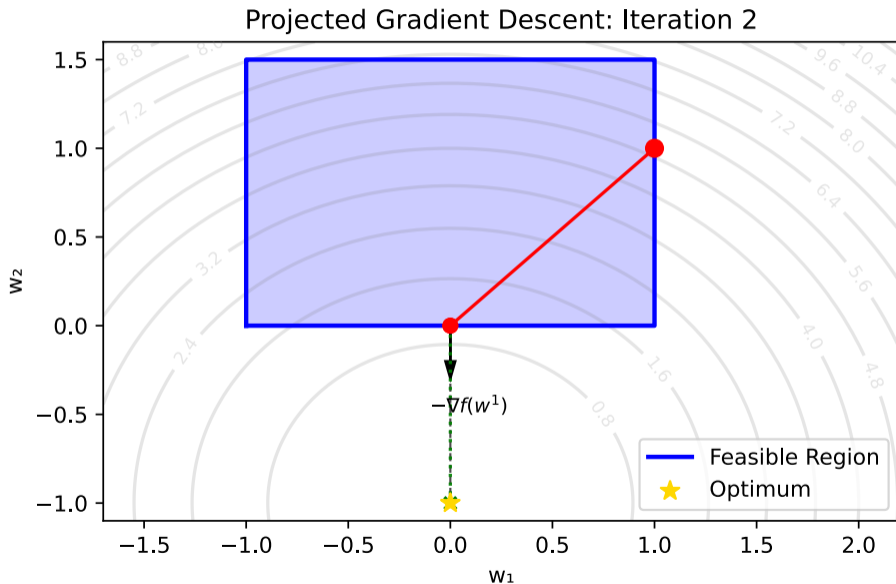
2d пример. Метод проекции градиента



2d пример. Метод проекции градиента



2d пример. Метод проекции градиента



Квадратичная функция на кубе

$$\min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ -1 \preceq x \preceq 1}} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x,$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \lambda(A) \in [\mu; L].$$

Проекция простая:

$$\pi_S(x) = \text{clip}(x, -1, 1).$$

или

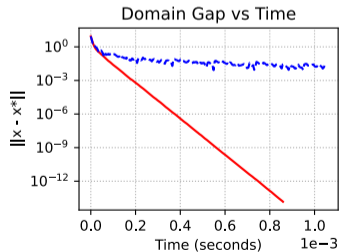
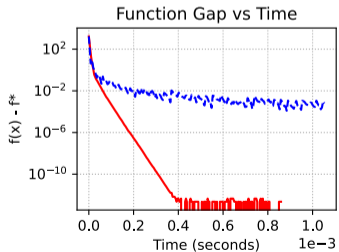
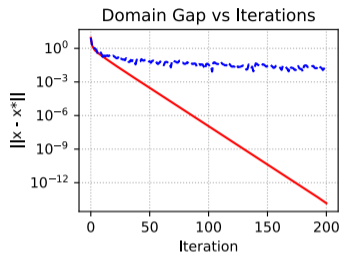
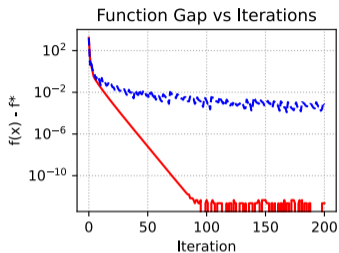
$$\pi_S(x) = \max(-1, \min(1, x)).$$

Линейный минимизатор (LMO) равен
 $y = \operatorname{argmin}_{z \in S} \langle g, z \rangle$.

Поскольку множество допустимых значений
разделяется по координатам, решение
вычисляется по координатам как

$$y_i = \begin{cases} -1, & \text{if } g_i > 0, \\ 1, & \text{if } g_i \leq 0. \end{cases}$$

Constrained convex quadratic problem: $n=80, \mu=0, L=10$



— Projected Gradient Descent - - - Frank-Wolfe

Квадратичная функция на кубе

$$\min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ -1 \preceq x \preceq 1}} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x,$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \lambda(A) \in [\mu; L].$$

Проекция простая:

$$\pi_S(x) = \text{clip}(x, -1, 1).$$

или

$$\pi_S(x) = \max(-1, \min(1, x)).$$

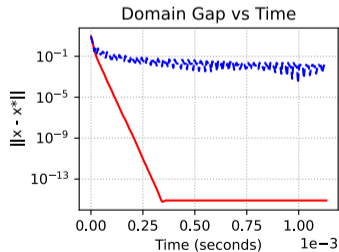
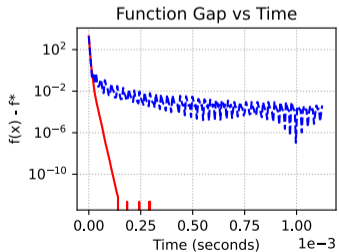
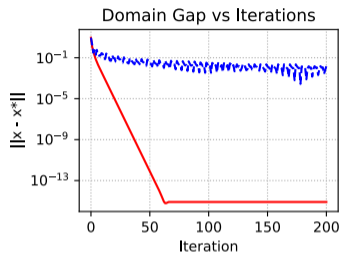
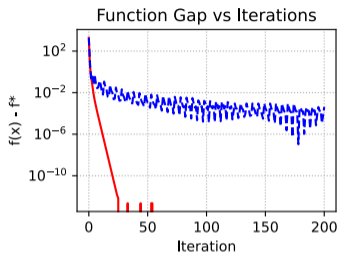
Линейный минимизатор (LMO) равен

$$y = \underset{z \in S}{\operatorname{argmin}} \langle g, z \rangle.$$

Поскольку множество допустимых значений разделяется по координатам, решение вычисляется по координатам как

$$y_i = \begin{cases} -1, & \text{if } g_i > 0, \\ 1, & \text{if } g_i \leq 0. \end{cases}$$

Constrained strongly Convex quadratic problem: $n=80, \mu=1, L=10$



— Projected Gradient Descent - - - Frank-Wolfe

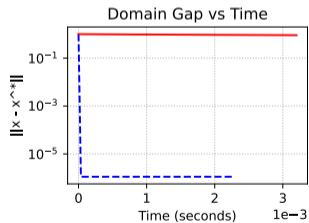
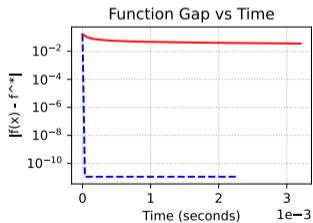
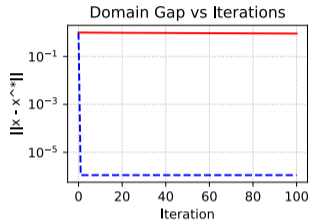
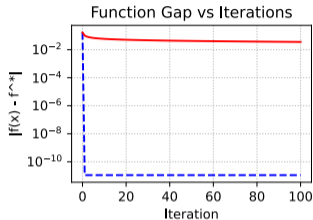
Квадратичная функция на симплексе (Диагональная матрица)

$$\min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \geq 0, 1^T x = 1}} \frac{1}{2} x^T A x,$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \lambda(A) \in [0; 100].$$

$$\min_{1^T x = 1, x \geq 0} \frac{1}{2} x^T A x, \quad n = 200$$

Метод	Обновление, мс	LMO/проекция, мс
PGD	0.0069	0.0167
FW	0.0070	0.0066



-- Frank-Wolfe — Projected Gradient Descent

Проекция на единичный симплекс $\pi_S(x)$ может быть выполнена за $\mathcal{O}(n \log n)$ или в среднем за $\mathcal{O}(n)$ операций.³
 Линейный минимизатор (LMO) равен $y = \operatorname{argmin}_{z \in S} \langle g, z \rangle$. Решение соответствует вершине симплекса:

$$y = e_j \quad \text{where} \quad j = \operatorname{argmin}_i g_i.$$

³ Efficient Projections onto the ℓ_1 -Ball for Learning in High Dimensions

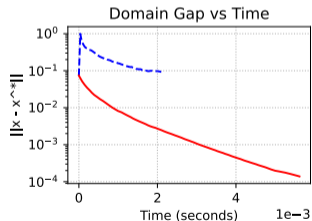
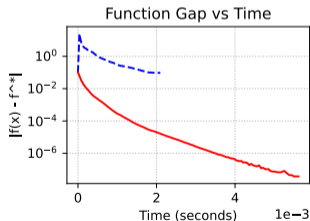
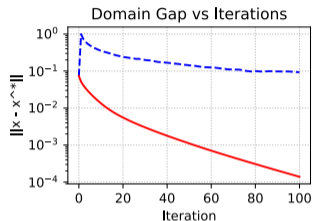
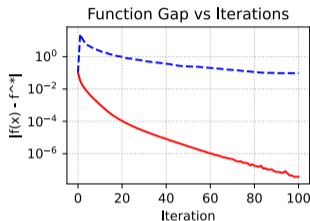
Квадратичная функция на симплексе

$$\min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \geq 0, 1^T x = 1}} \frac{1}{2} x^T A x,$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \lambda(A) \in [0; 100].$$

$$\min_{1^T x = 1, x \geq 0} \frac{1}{2} x^T A x, n = 200$$

Метод	Обновление, мс	LMO/проекция, мс
PGD	0.0069	0.0420
FW	0.0069	0.0066



--- Frank-Wolfe — Projected Gradient Descent

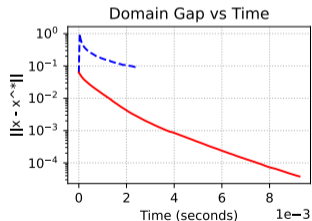
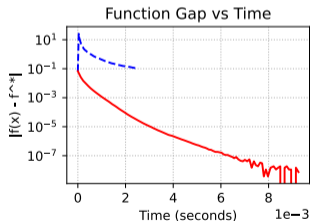
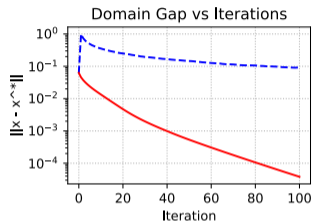
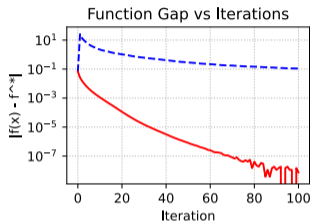
Квадратичная функция на симплексе

$$\min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \geq 0, 1^T x = 1}} \frac{1}{2} x^T A x,$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \lambda(A) \in [0; 100].$$

$$\min_{1^T x = 1, x \geq 0} \frac{1}{2} x^T A x, n = 300$$

Метод	Обновление, мс	LMO/проекция, мс
PGD	0.0068	0.0761
FW	0.0069	0.0070



--- Frank-Wolfe — Projected Gradient Descent

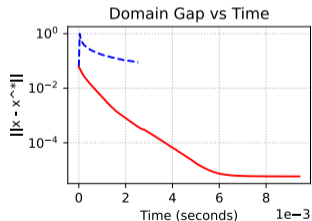
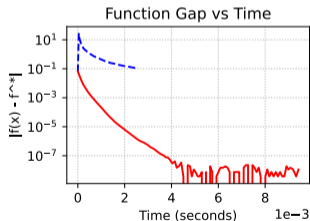
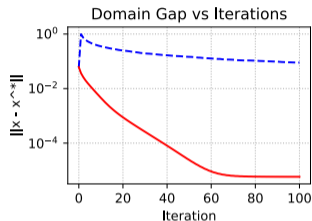
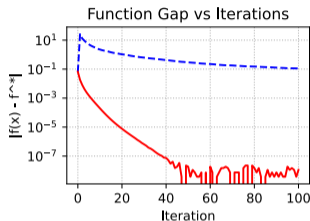
Квадратичная функция на симплексе

$$\min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \geq 0, 1^T x = 1}} \frac{1}{2} x^T A x,$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \lambda(A) \in [1; 100].$$

$$\min_{1^T x = 1, x \geq 0} 1/2 x^T A x, n = 300$$

Метод	Обновление, мс	LMO/проекция, мс
PGD	0.0068	0.0752
FW	0.0067	0.0068



--- Frank-Wolfe — Projected Gradient Descent

Метод проекции градиента vs метод Франк-Вульфа

Основное отличие между методами заключается в том, что метод проекции градиента требует проекцию, в то время как метод Франк-Вульфа требует только линейный минимизатор (LMO).

В недавней книге авторы представили следующую таблицу сравнения сложности линейных минимизаций и проекций на некоторые выпуклые множества с точностью до аддитивной ошибки ϵ в евклидовой норме.

Множество	Линейный минимизатор	Проекция
n -мерный ℓ_p -шар, $p \neq 1, 2, \infty$	$\mathcal{O}(n)$	$\tilde{\mathcal{O}}\left(\frac{n}{\epsilon^2}\right)$
Ядро нормы матрицы $n \times m$	$\mathcal{O}\left(\nu \ln(m+n) \frac{\sqrt{\sigma_1}}{\sqrt{\epsilon}}\right)$	$\mathcal{O}(m n \min\{m, n\})$
Потоковый многогранник на графе с m вершинами и n ребрами (ограничение на пропускную способность ребер)	$\mathcal{O}\left((n \log m)(n + m \log m)\right)$	$\tilde{\mathcal{O}}\left(\frac{n}{\epsilon^2}\right)$ or $\mathcal{O}(n^4 \log n)$
Многогранник Birkhoff ($n \times n$ дважды стохастических матриц)	$\mathcal{O}(n^3)$	$\tilde{\mathcal{O}}\left(\frac{n^2}{\epsilon^2}\right)$

Когда ϵ отсутствует, нет аддитивной ошибки. $\tilde{\mathcal{O}}$ скрывает полилогарифмические факторы в размерностях и полиномиальные факторы в константах, связанных с расстоянием до оптимума. Для ядерной нормы шара, ν обозначает количество ненулевых элементов, а σ_1 обозначает наибольшее сингулярное значение проекции матрицы.

Бонус: Доказательства



i Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ - L -гладкая выпуклая функция. Тогда, для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, выполняется следующее неравенство:

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2L} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq f(y) \text{ or, equivalently,}$$
$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2 = \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq 2L (f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle)$$

Доказательство

1. Для доказательства этого рассмотрим другую функцию $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$. Она очевидно выпукла (как сумма выпуклых функций). И легко проверить, что она L -гладкая по определению, так как $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x)$ и $\|\nabla \varphi(y_1) - \nabla \varphi(y_2)\| = \|\nabla f(y_1) - \nabla f(y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|$.



Доказательство

1. Для доказательства этого рассмотрим другую функцию $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$. Она очевидно выпукла (как сумма выпуклых функций). И легко проверить, что она L -гладкая по определению, так как $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x)$ и $\|\nabla \varphi(y_1) - \nabla \varphi(y_2)\| = \|\nabla f(y_1) - \nabla f(y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|$.
2. Теперь рассмотрим свойство гладкости параболы для функции $\varphi(y)$:



Доказательство

1. Для доказательства этого рассмотрим другую функцию $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$. Она очевидно выпукла (как сумма выпуклых функций). И легко проверить, что она L -гладкая по определению, так как $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x)$ и $\|\nabla \varphi(y_1) - \nabla \varphi(y_2)\| = \|\nabla f(y_1) - \nabla f(y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|$.
2. Теперь рассмотрим свойство гладкости параболы для функции $\varphi(y)$:

$$\varphi(y) \leq \varphi(x) + \langle \nabla \varphi(x), y - x \rangle + \frac{L}{2} \|y - x\|_2^2$$



Доказательство

1. Для доказательства этого рассмотрим другую функцию $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$. Она очевидно выпукла (как сумма выпуклых функций). И легко проверить, что она L -гладкая по определению, так как $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x)$ и $\|\nabla \varphi(y_1) - \nabla \varphi(y_2)\| = \|\nabla f(y_1) - \nabla f(y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|$.
2. Теперь рассмотрим свойство гладкости параболы для функции $\varphi(y)$:

$$\varphi(y) \leq \varphi(x) + \langle \nabla \varphi(x), y - x \rangle + \frac{L}{2} \|y - x\|_2^2$$
$$x:=y, y:=y - \frac{1}{L} \nabla \varphi(y) \quad \varphi\left(y - \frac{1}{L} \nabla \varphi(y)\right) \leq \varphi(y) + \left\langle \nabla \varphi(y), -\frac{1}{L} \nabla \varphi(y) \right\rangle + \frac{1}{2L} \|\nabla \varphi(y)\|_2^2$$



Доказательство

1. Для доказательства этого рассмотрим другую функцию $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$. Она очевидно выпукла (как сумма выпуклых функций). И легко проверить, что она L -гладкая по определению, так как $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x)$ и $\|\nabla \varphi(y_1) - \nabla \varphi(y_2)\| = \|\nabla f(y_1) - \nabla f(y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|$.
2. Теперь рассмотрим свойство гладкости параболы для функции $\varphi(y)$:

$$\varphi(y) \leq \varphi(x) + \langle \nabla \varphi(x), y - x \rangle + \frac{L}{2} \|y - x\|_2^2$$

$$x:=y, y:=y-\frac{1}{L}\nabla\varphi(y) \quad \varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla\varphi(y)\right) \leq \varphi(y) + \left\langle \nabla\varphi(y), -\frac{1}{L}\nabla\varphi(y) \right\rangle + \frac{1}{2L}\|\nabla\varphi(y)\|_2^2$$

$$\varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla\varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla\varphi(y)\|_2^2$$

3. Из условий оптимальности первого порядка для выпуклой функции $\nabla\varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x) = 0$. Мы можем заключить, что для любого x , минимум функции $\varphi(y)$ находится в точке $y = x$. Следовательно:

$$\varphi(x) \leq \varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla\varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla\varphi(y)\|_2^2$$

3. Из условий оптимальности первого порядка для выпуклой функции $\nabla\varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x) = 0$. Мы можем заключить, что для любого x , минимум функции $\varphi(y)$ находится в точке $y = x$. Следовательно:

$$\varphi(x) \leq \varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla\varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla\varphi(y)\|_2^2$$

4. Теперь заменим $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$:



3. Из условий оптимальности первого порядка для выпуклой функции $\nabla\varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x) = 0$. Мы можем заключить, что для любого x , минимум функции $\varphi(y)$ находится в точке $y = x$. Следовательно:

$$\varphi(x) \leq \varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla\varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla\varphi(y)\|_2^2$$

4. Теперь заменим $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$:

$$f(x) - \langle \nabla f(x), x \rangle \leq f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle - \frac{1}{2L}\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2$$



3. Из условий оптимальности первого порядка для выпуклой функции $\nabla\varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x) = 0$. Мы можем заключить, что для любого x , минимум функции $\varphi(y)$ находится в точке $y = x$. Следовательно:

$$\varphi(x) \leq \varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla\varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla\varphi(y)\|_2^2$$

4. Теперь заменим $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$:

$$f(x) - \langle \nabla f(x), x \rangle \leq f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle - \frac{1}{2L}\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2$$

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2L}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq f(y)$$

3. Из условий оптимальности первого порядка для выпуклой функции $\nabla\varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x) = 0$. Мы можем заключить, что для любого x , минимум функции $\varphi(y)$ находится в точке $y = x$. Следовательно:

$$\varphi(x) \leq \varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla\varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla\varphi(y)\|_2^2$$

4. Теперь заменим $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$:

$$f(x) - \langle \nabla f(x), x \rangle \leq f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle - \frac{1}{2L}\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2$$

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2L}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq f(y)$$

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2 \leq 2L(f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y - x \rangle)$$



3. Из условий оптимальности первого порядка для выпуклой функции $\nabla\varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x) = 0$. Мы можем заключить, что для любого x , минимум функции $\varphi(y)$ находится в точке $y = x$. Следовательно:

$$\varphi(x) \leq \varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla\varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla\varphi(y)\|_2^2$$

4. Теперь заменим $\varphi(y) = f(y) - \langle\nabla f(x), y\rangle$:

$$f(x) - \langle\nabla f(x), x\rangle \leq f(y) - \langle\nabla f(x), y\rangle - \frac{1}{2L}\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2$$

$$f(x) + \langle\nabla f(x), y - x\rangle + \frac{1}{2L}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq f(y)$$

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2 \leq 2L(f(y) - f(x) - \langle\nabla f(x), y - x\rangle)$$

поменять x и y $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq 2L(f(x) - f(y) - \langle\nabla f(y), x - y\rangle)$



3. Из условий оптимальности первого порядка для выпуклой функции $\nabla\varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x) = 0$. Мы можем заключить, что для любого x , минимум функции $\varphi(y)$ находится в точке $y = x$. Следовательно:

$$\varphi(x) \leq \varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla\varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla\varphi(y)\|_2^2$$

4. Теперь заменим $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$:

$$f(x) - \langle \nabla f(x), x \rangle \leq f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle - \frac{1}{2L}\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2$$

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2L}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq f(y)$$

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2 \leq 2L(f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y - x \rangle)$$

поменять x и y $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq 2L(f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle)$

3. Из условий оптимальности первого порядка для выпуклой функции $\nabla\varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x) = 0$. Мы можем заключить, что для любого x , минимум функции $\varphi(y)$ находится в точке $y = x$. Следовательно:

$$\varphi(x) \leq \varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla\varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla\varphi(y)\|_2^2$$

4. Теперь заменим $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$:

$$f(x) - \langle \nabla f(x), x \rangle \leq f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle - \frac{1}{2L}\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2$$

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2L}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq f(y)$$

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2 \leq 2L(f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y - x \rangle)$$

поменять x и y $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq 2L(f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle)$

Лемма доказана. С первого взгляда она не имеет много геометрического смысла, но мы будем использовать ее как удобный инструмент для оценки разницы между градиентами.



i Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема на \mathbb{R}^n . Тогда функция f является μ -сильно выпуклой тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in \mathbb{R}^d$ выполняется следующее:

$$\text{Strongly convex case } \mu > 0 \quad \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$$

$$\text{Convex case } \mu = 0 \quad \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0$$

Доказательство

1. Мы дадим доказательство только для сильно выпуклого случая, выпуклый случай следует из него с установкой $\mu = 0$. Начнем с необходимости. Для сильно выпуклой функции

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2$$

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2$$

$$\text{сумма} \quad \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$$

Инструменты сходимости

2. Для достаточности мы предполагаем, что $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$. Используя теорему Ньютона-Лейбница $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt$:

Инструменты сходимости

2. Для достаточности мы предполагаем, что $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$. Используя теорему Ньютона-Лейбница $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt$:

$$f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle = \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle$$

Инструменты сходимости

2. Для достаточности мы предполагаем, что $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$. Используя теорему Ньютона-Лейбница $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\ \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y), x - y \rangle dt \\ \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), (x - y) \rangle dt \end{aligned}$$

Инструменты сходимости

2. Для достаточности мы предполагаем, что $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$. Используя теорему Ньютона-Лейбница $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\ \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y), x - y \rangle dt \\ y + t(x - y) - y &= t(x - y) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), (x - y) \rangle dt \\ &= \int_0^1 t^{-1} \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), t(x - y) \rangle dt \end{aligned}$$

Инструменты сходимости

2. Для достаточности мы предполагаем, что $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$. Используя теорему Ньютона-Лейбница $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\ \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y), x - y \rangle dt \\ y + t(x - y) - y &= t(x - y) \\ &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), t(x - y) \rangle dt \\ &\geq \int_0^1 t^{-1} \mu \|t(x - y)\|^2 dt \end{aligned}$$

Инструменты сходимости

2. Для достаточности мы предполагаем, что $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$. Используя теорему Ньютона-Лейбница $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\ \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y), x - y \rangle dt \\ y + t(x - y) - y &= t(x - y) \\ &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), t(x - y) \rangle dt \\ &\geq \int_0^1 t^{-1} \mu \|t(x - y)\|^2 dt = \mu \|x - y\|^2 \int_0^1 t dt \end{aligned}$$

Инструменты сходимости

2. Для достаточности мы предполагаем, что $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$. Используя теорему Ньютона-Лейбница $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\ \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y), x - y \rangle dt \\ y + t(x - y) - y &= t(x - y) \\ &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), t(x - y) \rangle dt \\ &\geq \int_0^1 t^{-1} \mu \|t(x - y)\|^2 dt = \mu \|x - y\|^2 \int_0^1 t dt = \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2 \end{aligned}$$

Инструменты сходимости

2. Для достаточности мы предполагаем, что $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$. Используя теорему Ньютона-Лейбница $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\ \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y), x - y \rangle dt \\ y + t(x - y) - y &= t(x - y) \\ &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), t(x - y) \rangle dt \\ &\geq \int_0^1 t^{-1} \mu \|t(x - y)\|^2 dt = \mu \|x - y\|^2 \int_0^1 t dt = \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2 \end{aligned}$$

Инструменты сходимости

2. Для достаточности мы предполагаем, что $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$. Используя теорему Ньютона-Лейбница $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\ \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y), x - y \rangle dt \\ y + t(x - y) - y &= t(x - y) \\ &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), t(x - y) \rangle dt \\ &\geq \int_0^1 t^{-1} \mu \|t(x - y)\|^2 dt = \mu \|x - y\|^2 \int_0^1 t dt = \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2 \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем выполнение критерия сильной выпуклости

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2$$

Инструменты сходимости

2. Для достаточности мы предполагаем, что $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$. Используя теорему Ньютона-Лейбница $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\ \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y), x - y \rangle dt \\ y + t(x - y) - y &= t(x - y) \\ &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), t(x - y) \rangle dt \\ &\geq \int_0^1 t^{-1} \mu \|t(x - y)\|^2 dt = \mu \|x - y\|^2 \int_0^1 t dt = \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2 \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем выполнение критерия сильной выпуклости

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2 \text{ или, эквивалентно:}$$

Инструменты сходимости

2. Для достаточности мы предполагаем, что $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$. Используя теорему Ньютона-Лейбница $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\ \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y), x - y \rangle dt \\ y + t(x - y) - y &= t(x - y) \\ &= \int_0^1 t^{-1} \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), t(x - y) \rangle dt \\ &\geq \int_0^1 t^{-1} \mu \|t(x - y)\|^2 dt = \mu \|x - y\|^2 \int_0^1 t dt = \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2 \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем выполнение критерия сильной выпуклости

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2 \text{ или, эквивалентно:}$$

поменять x и y
$$- \langle \nabla f(x), x - y \rangle \leq - \left(f(x) - f(y) + \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2 \right)$$

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ выпуклая и дифференцируемая. Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ замкнутое выпуклое множество, и пусть есть минимизатор x^* функции f на S ; кроме того, пусть f гладкая на S с параметром L . Алгоритм проекции градиента с шагом $\frac{1}{L}$ достигает следующей сходимости после итерации $k > 0$:

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{L \|x_0 - x^*\|_2^2}{2k}$$

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ выпуклая и дифференцируемая. Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ замкнутое выпуклое множество, и пусть есть минимизатор x^* функции f на S ; кроме того, пусть f гладкая на S с параметром L . Алгоритм проекции градиента с шагом $\frac{1}{L}$ достигает следующей сходимости после итерации $k > 0$:

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{L\|x_0 - x^*\|_2^2}{2k}$$

1. Докажем лемму о достаточном убывании, предполагая, что $y_k = x_k - \frac{1}{L}\nabla f(x_k)$ и правило косинусов $2x^T y = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2$:

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ выпуклая и дифференцируемая. Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ замкнутое выпуклое множество, и пусть есть минимизатор x^* функции f на S ; кроме того, пусть f гладкая на S с параметром L . Алгоритм проекции градиента с шагом $\frac{1}{L}$ достигает следующей сходимости после итерации $k > 0$:

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{L\|x_0 - x^*\|_2^2}{2k}$$

1. Докажем лемму о достаточном убывании, предполагая, что $y_k = x_k - \frac{1}{L}\nabla f(x_k)$ и правило косинусов $2x^T y = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2$:

Гладкость:
$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{L}{2}\|x_{k+1} - x_k\|^2$$

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ выпуклая и дифференцируемая. Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ замкнутое выпуклое множество, и пусть есть минимизатор x^* функции f на S ; кроме того, пусть f гладкая на S с параметром L . Алгоритм проекции градиента с шагом $\frac{1}{L}$ достигает следующей сходимости после итерации $k > 0$:

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{L\|x_0 - x^*\|_2^2}{2k}$$

1. Докажем лемму о достаточном убывании, предполагая, что $y_k = x_k - \frac{1}{L}\nabla f(x_k)$ и правило косинусов $2x^T y = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2$:

Гладкость:
$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{L}{2}\|x_{k+1} - x_k\|^2$$

Метод:
$$= f(x_k) - L\langle y_k - x_k, x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{L}{2}\|x_{k+1} - x_k\|^2$$

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ выпуклая и дифференцируемая. Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ замкнутое выпуклое множество, и пусть есть минимизатор x^* функции f на S ; кроме того, пусть f гладкая на S с параметром L . Алгоритм проекции градиента с шагом $\frac{1}{L}$ достигает следующей сходимости после итерации $k > 0$:

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{L\|x_0 - x^*\|_2^2}{2k}$$

1. Докажем лемму о достаточном убывании, предполагая, что $y_k = x_k - \frac{1}{L}\nabla f(x_k)$ и правило косинусов $2x^T y = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2$:

Гладкость:
$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{L}{2}\|x_{k+1} - x_k\|^2$$

Метод:
$$= f(x_k) - L\langle y_k - x_k, x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{L}{2}\|x_{k+1} - x_k\|^2$$

Правило косинусов:
$$= f(x_k) - \frac{L}{2}(\|y_k - x_k\|^2 + \|x_{k+1} - x_k\|^2 - \|y_k - x_{k+1}\|^2) + \frac{L}{2}\|x_{k+1} - x_k\|^2$$

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ выпуклая и дифференцируемая. Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ замкнутое выпуклое множество, и пусть есть минимизатор x^* функции f на S ; кроме того, пусть f гладкая на S с параметром L . Алгоритм проекции градиента с шагом $\frac{1}{L}$ достигает следующей сходимости после итерации $k > 0$:

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{L\|x_0 - x^*\|_2^2}{2k}$$

1. Докажем лемму о достаточном убывании, предполагая, что $y_k = x_k - \frac{1}{L}\nabla f(x_k)$ и правило косинусов $2x^T y = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2$:

Гладкость:
$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{L}{2}\|x_{k+1} - x_k\|^2$$

Метод:
$$= f(x_k) - L\langle y_k - x_k, x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{L}{2}\|x_{k+1} - x_k\|^2$$

Правило косинусов:
$$\begin{aligned} &= f(x_k) - \frac{L}{2}(\|y_k - x_k\|^2 + \|x_{k+1} - x_k\|^2 - \|y_k - x_{k+1}\|^2) + \frac{L}{2}\|x_{k+1} - x_k\|^2 \\ &= f(x_k) - \frac{1}{2L}\|\nabla f(x_k)\|^2 + \frac{L}{2}\|y_k - x_{k+1}\|^2 \end{aligned}$$

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

2. Теперь на каждом шаге прогресс не гарантирован. Снова используем формулу косинусов:

$$\left\langle \frac{1}{L} \nabla f(x_k), x_k - x^* \right\rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \|x_k - x^*\|^2 - \|x_k - x^* - \frac{1}{L} \nabla f(x_k)\|^2 \right)$$
$$\langle \nabla f(x_k), x_k - x^* \rangle = \frac{L}{2} \left(\frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \|x_k - x^*\|^2 - \|y_k - x^*\|^2 \right)$$

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

2. Теперь на каждом шаге прогресс не гарантирован. Снова используем формулу косинусов:

$$\left\langle \frac{1}{L} \nabla f(x_k), x_k - x^* \right\rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \|x_k - x^*\|^2 - \|x_k - x^* - \frac{1}{L} \nabla f(x_k)\|^2 \right)$$
$$\langle \nabla f(x_k), x_k - x^* \rangle = \frac{L}{2} \left(\frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \|x_k - x^*\|^2 - \|y_k - x^*\|^2 \right)$$

3. Теперь используем свойство проекции: $\|x - \text{proj}_S(y)\|^2 + \|y - \text{proj}_S(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2$ с $x = x^*, y = y_k$:

$$\|x^* - \text{proj}_S(y_k)\|^2 + \|y_k - \text{proj}_S(y_k)\|^2 \leq \|x^* - y_k\|^2$$
$$\|y_k - x^*\|^2 \geq \|x^* - x_{k+1}\|^2 + \|y_k - x_{k+1}\|^2$$

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

2. Теперь на каждом шаге прогресс не гарантирован. Снова используем формулу косинусов:

$$\left\langle \frac{1}{L} \nabla f(x_k), x_k - x^* \right\rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \|x_k - x^*\|^2 - \|x_k - x^* - \frac{1}{L} \nabla f(x_k)\|^2 \right)$$
$$\langle \nabla f(x_k), x_k - x^* \rangle = \frac{L}{2} \left(\frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \|x_k - x^*\|^2 - \|y_k - x^*\|^2 \right)$$

3. Теперь используем свойство проекции: $\|x - \text{proj}_S(y)\|^2 + \|y - \text{proj}_S(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2$ с $x = x^*, y = y_k$:

$$\|x^* - \text{proj}_S(y_k)\|^2 + \|y_k - \text{proj}_S(y_k)\|^2 \leq \|x^* - y_k\|^2$$
$$\|y_k - x^*\|^2 \geq \|x^* - x_{k+1}\|^2 + \|y_k - x_{k+1}\|^2$$

4. Теперь, используя выпуклость и предыдущую часть:

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

2. Теперь на каждом шаге прогресс не гарантирован. Снова используем формулу косинусов:

$$\left\langle \frac{1}{L} \nabla f(x_k), x_k - x^* \right\rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \|x_k - x^*\|^2 - \|x_k - x^* - \frac{1}{L} \nabla f(x_k)\|^2 \right)$$
$$\langle \nabla f(x_k), x_k - x^* \rangle = \frac{L}{2} \left(\frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \|x_k - x^*\|^2 - \|y_k - x^*\|^2 \right)$$

3. Теперь используем свойство проекции: $\|x - \text{proj}_S(y)\|^2 + \|y - \text{proj}_S(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2$ с $x = x^*, y = y_k$:

$$\|x^* - \text{proj}_S(y_k)\|^2 + \|y_k - \text{proj}_S(y_k)\|^2 \leq \|x^* - y_k\|^2$$
$$\|y_k - x^*\|^2 \geq \|x^* - x_{k+1}\|^2 + \|y_k - x_{k+1}\|^2$$

4. Теперь, используя выпуклость и предыдущую часть:

Выпуклость:

$$f(x_k) - f^* \leq \langle \nabla f(x_k), x_k - x^* \rangle$$

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

2. Теперь на каждом шаге прогресс не гарантирован. Снова используем формулу косинусов:

$$\left\langle \frac{1}{L} \nabla f(x_k), x_k - x^* \right\rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \|x_k - x^*\|^2 - \|x_k - x^* - \frac{1}{L} \nabla f(x_k)\|^2 \right)$$
$$\langle \nabla f(x_k), x_k - x^* \rangle = \frac{L}{2} \left(\frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \|x_k - x^*\|^2 - \|y_k - x^*\|^2 \right)$$

3. Теперь используем свойство проекции: $\|x - \text{proj}_S(y)\|^2 + \|y - \text{proj}_S(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2$ с $x = x^*, y = y_k$:

$$\|x^* - \text{proj}_S(y_k)\|^2 + \|y_k - \text{proj}_S(y_k)\|^2 \leq \|x^* - y_k\|^2$$
$$\|y_k - x^*\|^2 \geq \|x^* - x_{k+1}\|^2 + \|y_k - x_{k+1}\|^2$$

4. Теперь, используя выпуклость и предыдущую часть:

Выпуклость:

$$f(x_k) - f^* \leq \langle \nabla f(x_k), x_k - x^* \rangle$$
$$\leq \frac{L}{2} \left(\frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 - \|y_k - x_{k+1}\|^2 \right)$$

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

2. Теперь на каждом шаге прогресс не гарантирован. Снова используем формулу косинусов:

$$\left\langle \frac{1}{L} \nabla f(x_k), x_k - x^* \right\rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \|x_k - x^*\|^2 - \|x_k - x^* - \frac{1}{L} \nabla f(x_k)\|^2 \right)$$
$$\langle \nabla f(x_k), x_k - x^* \rangle = \frac{L}{2} \left(\frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \|x_k - x^*\|^2 - \|y_k - x^*\|^2 \right)$$

3. Теперь используем свойство проекции: $\|x - \text{proj}_S(y)\|^2 + \|y - \text{proj}_S(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2$ с $x = x^*, y = y_k$:

$$\|x^* - \text{proj}_S(y_k)\|^2 + \|y_k - \text{proj}_S(y_k)\|^2 \leq \|x^* - y_k\|^2$$
$$\|y_k - x^*\|^2 \geq \|x^* - x_{k+1}\|^2 + \|y_k - x_{k+1}\|^2$$

4. Теперь, используя выпуклость и предыдущую часть:

Выпуклость:

$$f(x_k) - f^* \leq \langle \nabla f(x_k), x_k - x^* \rangle$$
$$\leq \frac{L}{2} \left(\frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 - \|y_k - x_{k+1}\|^2 \right)$$

Просуммируем для $i = 0, k-1$

$$\sum_{i=0}^{k-1} [f(x_i) - f^*] \leq \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2L} \|\nabla f(x_i)\|^2 + \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|^2 - \frac{L}{2} \sum_{i=0}^{i-1} \|y_i - x_{i+1}\|^2$$

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

5. Оценим градиенты с помощью неравенства о достаточном убывании Уравнение 7:

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

5. Оценим градиенты с помощью неравенства о достаточном убывании Уравнение 7:

$$\sum_{i=0}^{k-1} [f(x_i) - f^*] \leq \sum_{i=0}^{k-1} \left[f(x_i) - f(x_{i+1}) + \frac{L}{2} \|y_i - x_{i+1}\|^2 \right] + \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|^2 - \frac{L}{2} \sum_{i=0}^{i-1} \|y_i - x_{i+1}\|^2$$

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

5. Оценим градиенты с помощью неравенства о достаточном убывании Уравнение 7:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k-1} [f(x_i) - f^*] &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \left[f(x_i) - f(x_{i+1}) + \frac{L}{2} \|y_i - x_{i+1}\|^2 \right] + \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|^2 - \frac{L}{2} \sum_{i=0}^{i-1} \|y_i - x_{i+1}\|^2 \\ &\leq f(x_0) - f(x_k) + \frac{L}{2} \sum_{i=0}^{i-1} \|y_i - x_{i+1}\|^2 + \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|^2 - \frac{L}{2} \sum_{i=0}^{i-1} \|y_i - x_{i+1}\|^2\end{aligned}$$

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

5. Оценим градиенты с помощью неравенства о достаточном убывании Уравнение 7:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k-1} [f(x_i) - f^*] &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \left[f(x_i) - f(x_{i+1}) + \frac{L}{2} \|y_i - x_{i+1}\|^2 \right] + \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|^2 - \frac{L}{2} \sum_{i=0}^{i-1} \|y_i - x_{i+1}\|^2 \\ &\leq f(x_0) - f(x_k) + \frac{L}{2} \sum_{i=0}^{i-1} \|y_i - x_{i+1}\|^2 + \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|^2 - \frac{L}{2} \sum_{i=0}^{i-1} \|y_i - x_{i+1}\|^2 \\ &\leq f(x_0) - f(x_k) + \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|^2\end{aligned}$$

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

5. Оценим градиенты с помощью неравенства о достаточном убывании Уравнение 7:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k-1} [f(x_i) - f^*] &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \left[f(x_i) - f(x_{i+1}) + \frac{L}{2} \|y_i - x_{i+1}\|^2 \right] + \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|^2 - \frac{L}{2} \sum_{i=0}^{i-1} \|y_i - x_{i+1}\|^2 \\ &\leq f(x_0) - f(x_k) + \frac{L}{2} \sum_{i=0}^{i-1} \|y_i - x_{i+1}\|^2 + \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|^2 - \frac{L}{2} \sum_{i=0}^{i-1} \|y_i - x_{i+1}\|^2 \\ &\leq f(x_0) - f(x_k) + \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|^2 \\ \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i) - kf^* &\leq f(x_0) - f(x_k) + \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|^2\end{aligned}$$

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

5. Оценим градиенты с помощью неравенства о достаточном убывании Уравнение 7:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k-1} [f(x_i) - f^*] &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \left[f(x_i) - f(x_{i+1}) + \frac{L}{2} \|y_i - x_{i+1}\|^2 \right] + \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|^2 - \frac{L}{2} \sum_{i=0}^{i-1} \|y_i - x_{i+1}\|^2 \\ &\leq f(x_0) - f(x_k) + \frac{L}{2} \sum_{i=0}^{i-1} \|y_i - x_{i+1}\|^2 + \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|^2 - \frac{L}{2} \sum_{i=0}^{i-1} \|y_i - x_{i+1}\|^2 \\ &\leq f(x_0) - f(x_k) + \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|^2 \\ \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i) - kf^* &\leq f(x_0) - f(x_k) + \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|^2 \\ \sum_{i=1}^k [f(x_i) - f^*] &\leq \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|^2\end{aligned}$$

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

6. Из неравенства о достаточном убывании

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \frac{1}{2L} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \frac{L}{2} \|y_k - x_{k+1}\|^2,$$

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

6. Из неравенства о достаточном убывании

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \frac{1}{2L} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \frac{L}{2} \|y_k - x_{k+1}\|^2,$$

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

6. Из неравенства о достаточном убывании

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \frac{1}{2L} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \frac{L}{2} \|y_k - x_{k+1}\|^2,$$

используем факт, что $x_{k+1} = \text{proj}_S(y_k)$. По определению проекции,

$$\|y_k - x_{k+1}\| \leq \|y_k - x_k\|,$$

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

6. Из неравенства о достаточном убывании

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \frac{1}{2L} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \frac{L}{2} \|y_k - x_{k+1}\|^2,$$

используем факт, что $x_{k+1} = \text{proj}_S(y_k)$. По определению проекции,

$$\|y_k - x_{k+1}\| \leq \|y_k - x_k\|,$$

и вспомним, что $y_k = x_k - \frac{1}{L} \nabla f(x_k)$ указывает на $\|y_k - x_k\| = \frac{1}{L} \|\nabla f(x_k)\|$. Следовательно,

$$\frac{L}{2} \|y_k - x_{k+1}\|^2 \leq \frac{L}{2} \|y_k - x_k\|^2 = \frac{L}{2} \frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 = \frac{1}{2L} \|\nabla f(x_k)\|^2.$$

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

6. Из неравенства о достаточном убывании

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \frac{1}{2L} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \frac{L}{2} \|y_k - x_{k+1}\|^2,$$

используем факт, что $x_{k+1} = \text{proj}_S(y_k)$. По определению проекции,

$$\|y_k - x_{k+1}\| \leq \|y_k - x_k\|,$$

и вспомним, что $y_k = x_k - \frac{1}{L} \nabla f(x_k)$ указывает на $\|y_k - x_k\| = \frac{1}{L} \|\nabla f(x_k)\|$. Следовательно,

$$\frac{L}{2} \|y_k - x_{k+1}\|^2 \leq \frac{L}{2} \|y_k - x_k\|^2 = \frac{L}{2} \frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 = \frac{1}{2L} \|\nabla f(x_k)\|^2.$$

Заменим обратно в (*):

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \frac{1}{2L} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \frac{1}{2L} \|\nabla f(x_k)\|^2 = f(x_k).$$

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

6. Из неравенства о достаточном убывании

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \frac{1}{2L} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \frac{L}{2} \|y_k - x_{k+1}\|^2,$$

используем факт, что $x_{k+1} = \text{proj}_S(y_k)$. По определению проекции,

$$\|y_k - x_{k+1}\| \leq \|y_k - x_k\|,$$

и вспомним, что $y_k = x_k - \frac{1}{L} \nabla f(x_k)$ указывает на $\|y_k - x_k\| = \frac{1}{L} \|\nabla f(x_k)\|$. Следовательно,

$$\frac{L}{2} \|y_k - x_{k+1}\|^2 \leq \frac{L}{2} \|y_k - x_k\|^2 = \frac{L}{2} \frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 = \frac{1}{2L} \|\nabla f(x_k)\|^2.$$

Заменим обратно в (*):

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \frac{1}{2L} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \frac{1}{2L} \|\nabla f(x_k)\|^2 = f(x_k).$$

Следовательно,

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) \quad \text{для каждого } k,$$

$\{f(x_k)\}$ является монотонно неубывающей последовательностью.

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

7. Финальная оценка сходимости Из шага 5, мы уже установили

$$\sum_{i=0}^{k-1} [f(x_i) - f^*] \leq \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|_2^2.$$

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

7. Финальная оценка сходимости Из шага 5, мы уже установили

$$\sum_{i=0}^{k-1} [f(x_i) - f^*] \leq \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|_2^2.$$

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

7. Финальная оценка сходимости Из шага 5, мы уже установили

$$\sum_{i=0}^{k-1} [f(x_i) - f^*] \leq \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|_2^2.$$

Поскольку $f(x_i)$ убывает в i , в частности $f(x_k) \leq f(x_i)$ для всех $i \leq k$. Следовательно,

$$k [f(x_k) - f^*] \leq \sum_{i=0}^{k-1} [f(x_i) - f^*] \leq \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|_2^2,$$

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

7. Финальная оценка сходимости Из шага 5, мы уже установили

$$\sum_{i=0}^{k-1} [f(x_i) - f^*] \leq \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|_2^2.$$

Поскольку $f(x_i)$ убывает в i , в частности $f(x_k) \leq f(x_i)$ для всех $i \leq k$. Следовательно,

$$k [f(x_k) - f^*] \leq \sum_{i=0}^{k-1} [f(x_i) - f^*] \leq \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|_2^2,$$

которое сразу дает

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{L \|x_0 - x^*\|_2^2}{2k}.$$

Это завершает доказательство скорости сходимости $\mathcal{O}(\frac{1}{k})$ для выпуклой и L -гладкой f с ограничениями на проекцию.

Скорость сходимости для гладкой сильно выпуклой функции

Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является μ -сильно выпуклой. Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ замкнутое выпуклое множество, и пусть есть минимизатор x^* функции f на S ; кроме того, пусть f гладкая на S с параметром L . Алгоритм проекции градиента с шагом $\alpha \leq \frac{1}{L}$ достигает следующей сходимости после $k > 0$:

$$\|x_k - x^*\|_2^2 \leq (1 - \alpha\mu)^k \|x_0 - x^*\|_2^2$$

Доказательство

1. Сначала докажем свойство стационарной точки: $\text{proj}_S(x^* - \alpha \nabla f(x^*)) = x^*$.

Это следует из критерия проекции и условия оптимальности первого порядка для x^* . Пусть $y = x^* - \alpha \nabla f(x^*)$. Мы должны показать, что $\langle y - x^*, x - x^* \rangle \leq 0$ для всех $x \in S$.

$$\langle (x^* - \alpha \nabla f(x^*)) - x^*, x - x^* \rangle = -\alpha \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \leq 0$$

Неравенство выполняется, потому что $\alpha > 0$ и $\langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \geq 0$ является условием оптимальности для x^* .

Скорость сходимости для гладкой сильно выпуклой функции

1. Учитывая расстояние до решения и используя свойство стационарной точки:

Скорость сходимости для гладкой сильно выпуклой функции

1. Учитывая расстояние до решения и используя свойство стационарной точки:

$$\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 = \|\text{proj}_S(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - x^*\|_2^2$$

Скорость сходимости для гладкой сильно выпуклой функции

1. Учитывая расстояние до решения и используя свойство стационарной точки:

$$\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 = \|\text{proj}_S(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - x^*\|_2^2$$

$$\text{Свойство стационарной точки} = \|\text{proj}_S(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - \text{proj}_S(x^* - \alpha \nabla f(x^*))\|_2^2$$

Скорость сходимости для гладкой сильно выпуклой функции

1. Учитывая расстояние до решения и используя свойство стационарной точки:

$$\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 = \|\text{proj}_S(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - x^*\|_2^2$$

$$\text{Свойство стационарной точки} = \|\text{proj}_S(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - \text{proj}_S(x^* - \alpha \nabla f(x^*))\|_2^2$$

$$\text{нерастяжимость} \leq \|x_k - \alpha \nabla f(x_k) - (x^* - \alpha \nabla f(x^*))\|_2^2$$

Скорость сходимости для гладкой сильно выпуклой функции

1. Учитывая расстояние до решения и используя свойство стационарной точки:

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 &= \|\text{proj}_S(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - x^*\|_2^2 \\ \text{Свойство стационарной точки} &= \|\text{proj}_S(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - \text{proj}_S(x^* - \alpha \nabla f(x^*))\|_2^2 \\ \text{нерастяжимость} &\leq \|x_k - \alpha \nabla f(x_k) - (x^* - \alpha \nabla f(x^*))\|_2^2 \\ &= \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha \langle \nabla f(x_k) - \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle + \alpha^2 \|\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*)\|_2^2\end{aligned}$$

Скорость сходимости для гладкой сильно выпуклой функции

1. Учитывая расстояние до решения и используя свойство стационарной точки:

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 &= \|\text{proj}_S(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - x^*\|_2^2 \\ \text{Свойство стационарной точки} &= \|\text{proj}_S(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - \text{proj}_S(x^* - \alpha \nabla f(x^*))\|_2^2 \\ \text{нерастяжимость} &\leq \|x_k - \alpha \nabla f(x_k) - (x^* - \alpha \nabla f(x^*))\|_2^2 \\ &= \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha \langle \nabla f(x_k) - \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle + \alpha^2 \|\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*)\|_2^2\end{aligned}$$

2. Теперь используем гладкость из инструментов сходимости и сильную выпуклость:

Скорость сходимости для гладкой сильно выпуклой функции

1. Учитывая расстояние до решения и используя свойство стационарной точки:

$$\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 = \|\text{proj}_S(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - x^*\|_2^2$$

$$\text{Свойство стационарной точки} = \|\text{proj}_S(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - \text{proj}_S(x^* - \alpha \nabla f(x^*))\|_2^2$$

$$\text{нерастяжимость} \leq \|x_k - \alpha \nabla f(x_k) - (x^* - \alpha \nabla f(x^*))\|_2^2$$

$$= \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha \langle \nabla f(x_k) - \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle + \alpha^2 \|\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*)\|_2^2$$

2. Теперь используем гладкость из инструментов сходимости и сильную выпуклость:

$$\text{гладкость} \quad \|\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*)\|_2^2 \leq 2L(f(x_k) - f(x^*) - \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle)$$

Скорость сходимости для гладкой сильно выпуклой функции

1. Учитывая расстояние до решения и используя свойство стационарной точки:

$$\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 = \|\text{proj}_S(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - x^*\|_2^2$$

$$\text{Свойство стационарной точки} = \|\text{proj}_S(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - \text{proj}_S(x^* - \alpha \nabla f(x^*))\|_2^2$$

$$\text{нерастяжимость} \leq \|x_k - \alpha \nabla f(x_k) - (x^* - \alpha \nabla f(x^*))\|_2^2$$

$$= \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha \langle \nabla f(x_k) - \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle + \alpha^2 \|\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*)\|_2^2$$

2. Теперь используем гладкость из инструментов сходимости и сильную выпуклость:

$$\text{гладкость} \quad \|\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*)\|_2^2 \leq 2L (f(x_k) - f(x^*) - \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle)$$

$$\text{сильная выпуклость} \quad -\langle \nabla f(x_k) - \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle \leq -\left(f(x_k) - f(x^*) + \frac{\mu}{2} \|x_k - x^*\|_2^2\right) - \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle$$

Скорость сходимости для гладкой сильно выпуклой функции

3. Заменяем:

Скорость сходимости для гладкой сильно выпуклой функции

3. Заменим:

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 &\leq \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha \left(f(x_k) - f(x^*) + \frac{\mu}{2} \|x_k - x^*\|_2^2 \right) - 2\alpha \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle + \\ &\quad + \alpha^2 2L (f(x_k) - f(x^*) - \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle)\end{aligned}$$

3. Заменим:

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 &\leq \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha \left(f(x_k) - f(x^*) + \frac{\mu}{2} \|x_k - x^*\|_2^2 \right) - 2\alpha \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle + \\ &\quad + \alpha^2 2L (f(x_k) - f(x^*) - \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle) \\ &\leq (1 - \alpha\mu) \|x_k - x^*\|^2 + 2\alpha(\alpha L - 1) (f(x_k) - f(x^*) - \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle)\end{aligned}$$

Скорость сходимости для гладкой сильно выпуклой функции

3. Заменяем:

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 &\leq \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha \left(f(x_k) - f(x^*) + \frac{\mu}{2} \|x_k - x^*\|_2^2 \right) - 2\alpha \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle + \\ &\quad + \alpha^2 2L (f(x_k) - f(x^*) - \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle) \\ &\leq (1 - \alpha\mu) \|x_k - x^*\|^2 + 2\alpha(\alpha L - 1) (f(x_k) - f(x^*) - \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle)\end{aligned}$$

4. В силу выпуклости f : $f(x_k) - f(x^*) - \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle \geq 0$. Следовательно, при выборе $\alpha \leq \frac{1}{L}$:

$$\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 \leq (1 - \alpha\mu) \|x_k - x^*\|^2,$$

что и дает линейную сходимость метода со скоростью не хуже $1 - \frac{\mu}{L}$.

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является выпуклой и дифференцируемой. Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ замкнутое выпуклое множество, и пусть существует минимизатор x^* функции f на S ; кроме того, пусть f гладкая на S с параметром L . Метод Франк-Вульфа с шагом $\gamma_k = \frac{k-1}{k+1}$ достигает следующей сходимости после $k > 0$ итераций:

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{2LR^2}{k+1}$$

где $R = \max_{x,y \in S} \|x - y\|$ является диаметром множества S .

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является выпуклой и дифференцируемой. Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ замкнутое выпуклое множество, и пусть существует минимизатор x^* функции f на S ; кроме того, пусть f гладкая на S с параметром L . Метод Франк-Вульфа с шагом $\gamma_k = \frac{k-1}{k+1}$ достигает следующей сходимости после $k > 0$ итераций:

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{2LR^2}{k+1}$$

где $R = \max_{x,y \in S} \|x - y\|$ является диаметром множества S .

1. Благодаря L -гладкости функции f , имеем:

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}) - f(x_k) &\leq \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \\ &= (1 - \gamma_k) \langle \nabla f(x_k), y_k - x_k \rangle + \frac{L(1 - \gamma_k)^2}{2} \|y_k - x_k\|^2 \end{aligned}$$

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

2. Благодаря выпуклости функции f , для любой точки $x \in S$, включая x^* :

$$\langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle \leq f(x) - f(x_k)$$

В частности, для $x = x^*$:

$$\langle \nabla f(x_k), x^* - x_k \rangle \leq f(x^*) - f(x_k)$$

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

2. Благодаря выпуклости функции f , для любой точки $x \in S$, включая x^* :

$$\langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle \leq f(x) - f(x_k)$$

В частности, для $x = x^*$:

$$\langle \nabla f(x_k), x^* - x_k \rangle \leq f(x^*) - f(x_k)$$

3. По определению y_k , имеем $\langle \nabla f(x_k), y_k \rangle \leq \langle \nabla f(x_k), x^* \rangle$, следовательно:

$$\langle \nabla f(x_k), y_k - x_k \rangle \leq \langle \nabla f(x_k), x^* - x_k \rangle \leq f(x^*) - f(x_k)$$

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

2. Благодаря выпуклости функции f , для любой точки $x \in S$, включая x^* :

$$\langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle \leq f(x) - f(x_k)$$

В частности, для $x = x^*$:

$$\langle \nabla f(x_k), x^* - x_k \rangle \leq f(x^*) - f(x_k)$$

3. По определению y_k , имеем $\langle \nabla f(x_k), y_k \rangle \leq \langle \nabla f(x_k), x^* \rangle$, следовательно:

$$\langle \nabla f(x_k), y_k - x_k \rangle \leq \langle \nabla f(x_k), x^* - x_k \rangle \leq f(x^*) - f(x_k)$$

4. Объединяя неравенства:

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}) - f(x_k) &\leq (1 - \gamma_k) \langle \nabla f(x_k), y_k - x_k \rangle + \frac{L(1 - \gamma_k)^2}{2} \|y_k - x_k\|^2 \\ &\leq (1 - \gamma_k) (f(x^*) - f(x_k)) + \frac{L(1 - \gamma_k)^2}{2} R^2 \end{aligned}$$

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

2. Благодаря выпуклости функции f , для любой точки $x \in S$, включая x^* :

$$\langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle \leq f(x) - f(x_k)$$

В частности, для $x = x^*$:

$$\langle \nabla f(x_k), x^* - x_k \rangle \leq f(x^*) - f(x_k)$$

3. По определению y_k , имеем $\langle \nabla f(x_k), y_k \rangle \leq \langle \nabla f(x_k), x^* \rangle$, следовательно:

$$\langle \nabla f(x_k), y_k - x_k \rangle \leq \langle \nabla f(x_k), x^* - x_k \rangle \leq f(x^*) - f(x_k)$$

4. Объединяя неравенства:

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}) - f(x_k) &\leq (1 - \gamma_k) \langle \nabla f(x_k), y_k - x_k \rangle + \frac{L(1 - \gamma_k)^2}{2} \|y_k - x_k\|^2 \\ &\leq (1 - \gamma_k) (f(x^*) - f(x_k)) + \frac{L(1 - \gamma_k)^2}{2} R^2 \end{aligned}$$

5. Перегруппируем слагаемые:

$$f(x_{k+1}) - f(x^*) \leq \gamma_k (f(x_k) - f(x^*)) + (1 - \gamma_k)^2 \frac{LR^2}{2}$$

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

6. Обозначим $\delta_k = \frac{f(x_k) - f(x^*)}{LR^2}$, получим:

$$\delta_{k+1} \leq \gamma_k \delta_k + \frac{(1 - \gamma_k)^2}{2} = \frac{k-1}{k+1} \delta_k + \frac{2}{(k+1)^2}$$

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

6. Обозначим $\delta_k = \frac{f(x_k) - f(x^*)}{LR^2}$, получим:

$$\delta_{k+1} \leq \gamma_k \delta_k + \frac{(1 - \gamma_k)^2}{2} = \frac{k-1}{k+1} \delta_k + \frac{2}{(k+1)^2}$$

7. Докажем, что $\delta_k \leq \frac{2}{k+1}$ индукцией.

что дает нам желаемый результат:

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{2LR^2}{k+1}$$

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

6. Обозначим $\delta_k = \frac{f(x_k) - f(x^*)}{LR^2}$, получим:

$$\delta_{k+1} \leq \gamma_k \delta_k + \frac{(1 - \gamma_k)^2}{2} = \frac{k-1}{k+1} \delta_k + \frac{2}{(k+1)^2}$$

7. Докажем, что $\delta_k \leq \frac{2}{k+1}$ индукцией.

- База: $\delta_2 \leq \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$

что дает нам желаемый результат:

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{2LR^2}{k+1}$$

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

6. Обозначим $\delta_k = \frac{f(x_k) - f(x^*)}{LR^2}$, получим:

$$\delta_{k+1} \leq \gamma_k \delta_k + \frac{(1 - \gamma_k)^2}{2} = \frac{k-1}{k+1} \delta_k + \frac{2}{(k+1)^2}$$

7. Докажем, что $\delta_k \leq \frac{2}{k+1}$ индукцией.

- База: $\delta_2 \leq \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$
- Предположение: $\delta_k \leq \frac{2}{k+1}$

что дает нам желаемый результат:


$$f(x_k) - f^* \leq \frac{2LR^2}{k+1}$$

Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

6. Обозначим $\delta_k = \frac{f(x_k) - f(x^*)}{LR^2}$, получим:

$$\delta_{k+1} \leq \gamma_k \delta_k + \frac{(1 - \gamma_k)^2}{2} = \frac{k-1}{k+1} \delta_k + \frac{2}{(k+1)^2}$$

7. Докажем, что $\delta_k \leq \frac{2}{k+1}$ индукцией.

- База: $\delta_2 \leq \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$
- Предположение: $\delta_k \leq \frac{2}{k+1}$
- Тогда $\delta_{k+1} \leq \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{2}{k+1} + \frac{2}{(k+1)^2} = \frac{2k}{k^2+2k+1} < \frac{2}{k+2}$ 

что дает нам желаемый результат:

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{2LR^2}{k+1}$$


Нижняя граница для метода Франк-Вульфа ⁴

Theorem

Рассмотрим любой алгоритм, который использует только линейный минимизатор (LMO). Пусть диаметр множества S равен R . Существует L -гладкая сильно выпуклая функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что этот алгоритм требует по крайней мере

$$\min \left(\frac{n}{2}, \frac{LR^2}{16\varepsilon} \right)$$

итераций (т.е. вызовов LMO) для построения точки $\hat{x} \in S$ с $f(\hat{x}) - \min_{x \in S} f(x) \leq \varepsilon$. Нижняя граница применима как для выпуклых, так и для сильно выпуклых функций.

⁴  The Complexity of Large-scale Convex Programming under a Linear Optimization Oracle

Нижняя граница для метода Франк-Вульфа ⁴

Theorem

Рассмотрим любой алгоритм, который использует только линейный минимизатор (LMO). Пусть диаметр множества S равен R . Существует L -гладкая сильно выпуклая функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что этот алгоритм требует по крайней мере

$$\min \left(\frac{n}{2}, \frac{LR^2}{16\varepsilon} \right)$$

итераций (т.е. вызовов LMO) для построения точки $\hat{x} \in S$ с $f(\hat{x}) - \min_{x \in S} f(x) \leq \varepsilon$. Нижняя граница применима как для выпуклых, так и для сильно выпуклых функций.


Схема доказательства. Рассмотрим следующую задачу оптимизации:

$$\min_{x \in S} f(x) = \min_{x \in S} \frac{1}{2} \|x\|_2^2$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}$$

Обратим внимание, что:

- f является 1-гладкой;
- диаметр S равен $R = 2$;
- f сильно выпукла.

⁴  The Complexity of Large-scale Convex Programming under a Linear Optimization Oracle

Нижняя граница для метода Франк-Вульфа ⁵

1. Оптимальное решение равно

$$x^* = \frac{1}{n} \mathbf{1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i, \quad \text{и} \quad f(x^*) = \frac{1}{2n},$$

где $e_i = (0, \dots, 0, \underset{i\text{-ая позиция}}{1}, 0, \dots, 0)^\top$ является i -м стандартным базисным вектором.

Нижняя граница для метода Франк-Вульфа⁵


1. Оптимальное решение равно

$$x^* = \frac{1}{n} \mathbf{1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i, \quad \text{и} \quad f(x^*) = \frac{1}{2n},$$

где $e_i = (0, \dots, 0, \underset{i\text{-ая позиция}}{1}, 0, \dots, 0)^\top$ является i -м стандартным базисным вектором.

2. Линейный минимизатор (LMO) на S возвращает вершину e_i . После k итераций, метод обнаружит не более k различных базисных векторов e_{i_1}, \dots, e_{i_k} . Лучшая выпуклая комбинация, которую можно сформировать, равна

$$\hat{x} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k e_{i_j}.$$

⁵  The Complexity of Large-scale Convex Programming under a Linear Optimization Oracle

Нижняя граница для метода Франк-Вульфа ⁶

1. Оценивая функцию в \hat{x} , получаем:

$$f(\hat{x}) - f(x^*) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\min\{k, n\}} - \frac{1}{n} \right).$$


Нижняя граница для метода Франк-Вульфа ⁶

1. Оценивая функцию в \hat{x} , получаем:

$$f(\hat{x}) - f(x^*) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\min\{k, n\}} - \frac{1}{n} \right).$$

2. Чтобы гарантировать, что $f(\hat{x}) - f(x^*) \leq \varepsilon$, необходимо, чтобы (полное доказательство приведено в статье):

$$k \geq \min \left\{ \frac{n}{2}, \frac{1}{4\varepsilon} \right\} = \min \left\{ \frac{n}{2}, \frac{LR^2}{16\varepsilon} \right\}.$$

⁶  The Complexity of Large-scale Convex Programming under a Linear Optimization Oracle